

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS DE CONFIANZA

Conceptos

En este tema vamos a estudiar como estimar, es decir pronosticar, un parámetro de la población, generalmente la media, la varianza (en consecuencia la desviación típica) y la proporción, a partir de una muestra de tamaño n . Pero a diferencia de la estimación puntual donde tal estimación la efectuábamos dando un valor concreto, en esta ocasión el planteamiento es otro. Lo que haremos es **dar un intervalo** donde afirmaremos o pronosticaremos que **en su interior se encontrará el parámetro** a estimar, con una probabilidad de acertar previamente fijada y que trataremos que sea la mayor posible, es decir próxima a 1.

Para ello vamos a establecer la notación a utilizar:

Parámetro	En la muestra	En la población
Media	\bar{X}	μ
Varianza	S_n^2	σ^2
Desviación típica	S_n	σ
Cuasivarianza	S_{n-1}^2	σ_{n-1}

Es importante el uso de la calculadora para hallar estos valores en la muestra.

Hemos dicho que vamos a proponer un intervalo donde se encontrará el parámetro a estimar, con una probabilidad de acierto alta. Al valor de esta probabilidad la representaremos por $1-\alpha$, y la llamaremos **nivel de confianza**. A mayor valor de $1-\alpha$, más probabilidad de acierto en nuestra estimación, por tanto eso implica que α tendrá que ser pequeño, próximo a 0.

Recordemos que $1-\alpha$ representa siempre una probabilidad por lo que será un valor entre 0 y 1, si bien en la mayoría de los enunciados de los problemas suele ser enunciado en términos de tanto por ciento. Así cuando, por ejemplo, se dice que el nivel de confianza es del 90%, significa que $1-\alpha$ vale 0,9 y por tanto α vale 0,1.

Para interpretar bien estos conceptos veamos un ejemplo:

Supongamos que deseamos estimar la media de la estatura de una población mediante un intervalo de confianza al 95% de nivel de confianza, con una muestra de tamaño 50. Supongamos que tras los cálculos necesarios, el intervalo en cuestión es (a,b). Pues bien, esto quiere decir que si elegimos 100 muestras de tamaño 50 y cada vez calculamos el intervalo de confianza resultante, acertaremos en nuestro pronóstico en 95 de las 100 veces que realizaríamos la estimación con cada muestra.

Un dato importante como es de esperar, es el tamaño de la muestra, que representaremos por n .

Es evidente que, a igual nivel de confianza, cuanto mayor tamaño tenga la muestra, el intervalo de confianza se reducirá puesto que el valor obtenido en la muestra se acercará más al valor real de la población y por tanto el margen de error cometido (radio del intervalo) se hará más pequeño.

Si el tamaño de la muestra permanece constante y variamos $1-\alpha$, el tamaño del intervalo se hará más grande cuanto más aumente $1-\alpha$, es decir que el margen de error se hará más grande cuanto más precisión exijamos.

Por ejemplo, si para dar un intervalo de confianza de la media de la estatura de una población de adultos de un país, es seguro que acertaría al cien por cien si el intervalo que diese fuese (150 cm, 190 cm), pero sería una estimación absurda ya que no sabría

apreciar realmente la media. Por tanto se trata de dar un intervalo lo más reducido posible.

Cálculo de intervalos de confianza. Método del pivote

El cálculo de intervalos de confianza no es un proceso fácil cuando la variable en estudio no sigue unas pautas de normalidad, por lo que nosotros vamos a suponer siempre que la variable con la que vamos a trabajar sigue una distribución normal.

Dicho esto, el proceso para obtener el intervalo es dar una variable aleatoria donde intervenga el parámetro a estimar y el correspondiente de la muestra. A esta variable se le llama estadístico pivote y debe seguir una distribución de probabilidad conocida. Por ejemplo para el cálculo de un intervalo de confianza de la media se utiliza el siguiente estadístico pivote:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S_{n-1} / \sqrt{n}}$$

Pues bien, esa expresión donde interviene la media muestral, la media poblacional, la cuasi desviación típica y el tamaño muestral, sigue una distribución de probabilidad conocida que se encuentra tabulada, llamada t-Student con n-1 grados de libertad.

Se trata pues de dar un intervalo (a, b) de modo que

$$P(a < g < b) = 1 - \alpha, \text{ siendo } g \text{ el estadístico pivote correspondiente.}$$

Una vez establecida esa desigualdad, despejamos el parámetro poblacional que es el que queremos centrar en el intervalo.

Cálculo del intervalo de confianza para la media, conocida la desviación típica de la población en una variable aleatoria normal

Se utiliza es estadístico pivote:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \text{ que sigue una } N(0,1)$$

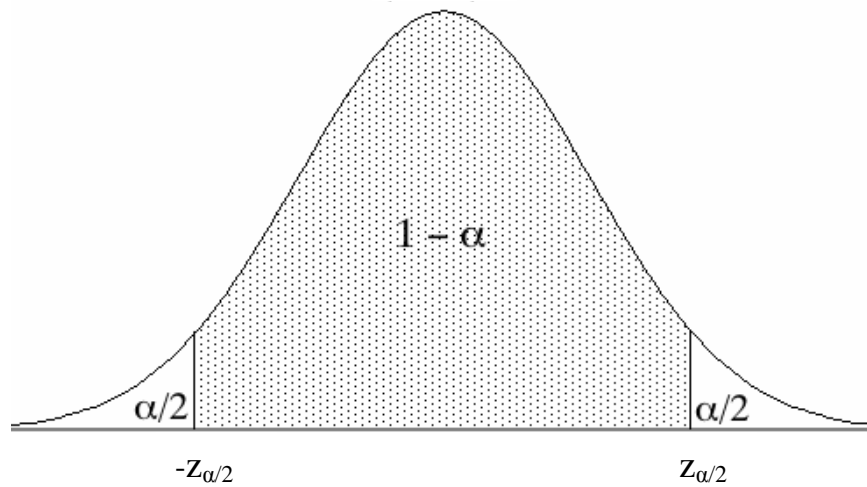
Recordemos que $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ que es la media muestral, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ como probaremos a continuación:

Calculemos la esperanza y la varianza de \bar{X} :

$$E[\bar{X}] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var[\bar{X}] = \frac{Var[X_1] + Var[X_2] + \dots + Var[X_n]}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \text{ por tanto la desv. tip. es } \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Estamos pues ante la siguiente situación:



$$P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha \Rightarrow P(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Hemos obtenido el intervalo que contiene a la media poblacional:

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right)$$

A la expresión $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$ se le denomina margen de error y en ocasiones se expresa en tanto por ciento. Obsérvese que se trata del radio del intervalo.

Veamos un ejemplo práctico:

Se desea estimar la media del tiempo empleado por un nadador en una prueba olímpica, para lo cual se cronometran 10 pruebas, obteniéndose una media de 41,5 minutos. Sabiendo por otras pruebas que la desviación típica de esta variable para este nadador es de 0,3 minutos, obtener un intervalo de confianza con un 95% de confianza.

¿Cuántas pruebas habría que cronometrar para que el margen de error en la estimación de la media fuese inferior a tres segundos. (Suponemos siempre que la variable que mide el tiempo del nadador sigue una distribución normal.)

Estamos en el caso de un intervalo de confianza para la media conociendo la desviación típica de la población.

Del enunciado del problema se desprenden directamente los siguientes datos:

$$\bar{X} = 41,5 \text{ seg. } \sigma = 0,3 \text{ seg. } n = 10 \quad 1 - \alpha = 0,95$$

Tenemos que buscar un valor $z_{\alpha/2}$, de modo que en la distribución $N(0,1)$ deje una área de probabilidad a la derecha igual a $\alpha/2$, es decir 0,025. Como la función de distribución de probabilidad de la tabla $N(0,1)$ me da el área de probabilidad acumulada, es decir a la izquierda, tengo que ver que valor de z me deja a la izquierda 0,975, que se corresponde para un valor de $z=1,96$.

Así pues el intervalo buscado es:

$$\left(41,5 - \frac{0,3}{\sqrt{10}} 1,96, 41,5 + \frac{0,3}{\sqrt{10}} 1,96 \right) = (41,5 - 0,1859, 41,5 + 0,1859) = (41,314, 41,686)$$

También se puede expresar así: *Se estima que la media es 41,5 más menos un margen de error del 18,59%*. (Recordemos que el margen de error cometido en la estima es el radio del intervalo, es decir 0,1859)

En cuanto a la segunda parte del problema, nos piden el tamaño de la muestra para que en las mismas condiciones el margen de error sea inferior a 3 seg, es decir 0,05 minutos (Debemos pasar todo a las mismas unidades). Que el error sea inferior al 5% es acotar el radio del intervalo de confianza con ese valor:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < 0,05, \text{ en nuestro caso } \frac{0,3}{\sqrt{n}} 1,96 < 0,05, \text{ de donde resulta } n > \mathbf{138,29}.$$

En consecuencia, para obtener un error inferior a 0,05 minutos, deberemos tomar una muestra de al menos 139 pruebas cronometradas.

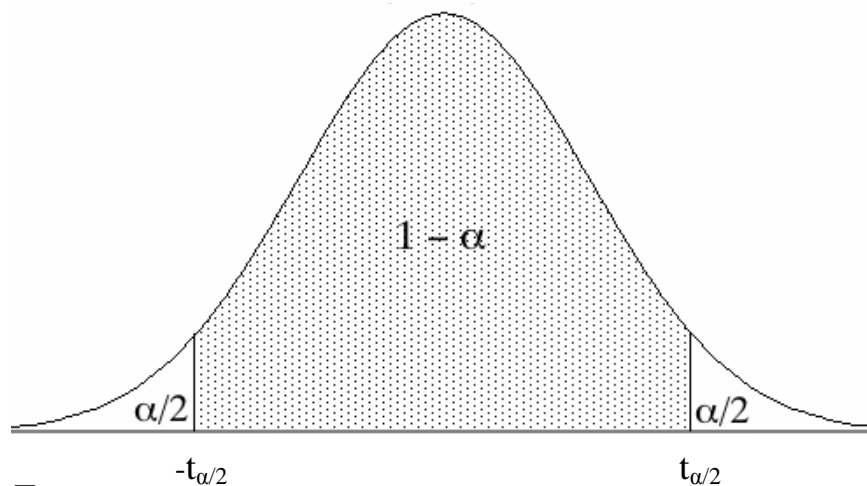
Cálculo del intervalo de confianza para la media, desconociendo la desviación típica de la población en una variable aleatoria normal

Se utiliza el estadístico pivote:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S_{n-1} / \sqrt{n}} \text{ que sigue una distribución llamada}$$

t-Student con n-1 grados de libertad, que presenta una forma en la curva muy similar a la de la distribución normal.

Estamos pues ante la siguiente situación:



$$P\left(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} < t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow P\left(\bar{X} - \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Hemos obtenido el intervalo que contiene a la media poblacional:

$$\left(\bar{X} - \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}\right)$$

A la expresión $\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}$ se le denomina margen de error y en ocasiones se expresa en tanto por ciento. Obsérvese que se trata del radio del intervalo.

Veamos un ejemplo práctico:

La puntuación media de una muestra de 20 jueces de gimnasia rítmica, elegidos al azar, para una misma prueba, presentó una media de 9,8525 y una cuasi desviación típica muestral de 0,0965. Calcular un intervalo de confianza con un 95% para la nota media. (Suponemos que la variable que mide la puntuación sigue una distribución normal.)

Estamos en el caso de un intervalo de confianza para la media desconociendo la desviación típica de la población.

Del enunciado del problema se desprenden directamente los siguientes datos:

$$\bar{X} = 9,8525. \quad S_{n-1} = 0,0965. \quad n = 20 \quad 1 - \alpha = 0,95$$

Tenemos que buscar un valor $t_{\alpha/2}$, de modo que en la distribución t-Student con 19 grados de libertad deje una área de probabilidad a la derecha igual a $\alpha/2$, es decir 0,025. Dicho valor se corresponde con un valor de $t = 2,0930$.

Así pues el intervalo buscado es:

$$\left(9,8525 - \frac{0,0965}{\sqrt{20}} \cdot 2,0903, 9,8525 + \frac{0,0965}{\sqrt{20}} \cdot 2,0903\right) = (9,8525 - 0,045, 9,8525 + 0,045) = (9,807, 9,897).$$

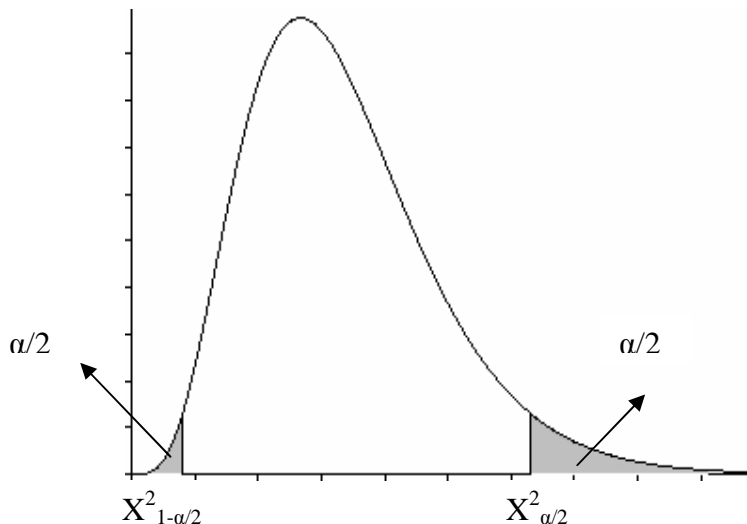
La media se estima en 9,8525 más menos un margen de error de 4,5%

Cálculo del intervalo de confianza para la varianza de la población en una variable aleatoria normal

Se utiliza el estadístico pivote:

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} \quad \text{que sigue una distribución llamada chi-cuadrado con } n-1 \text{ grados de}$$

libertad, que se representa por X^2 , que a diferencia de las anteriores presenta una curva no simétrica, y las tablas dadas expresan el área de probabilidad a la derecha de la variable. Estamos pues ante la siguiente situación:



$$P\left(X_{1-\alpha/2}^2 < \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} < X_{\alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha \Rightarrow P\left(\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{X_{\alpha/2}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{X_{1-\alpha/2}^2}\right) = 1 - \alpha$$

Hemos obtenido el intervalo que contiene a la varianza poblacional:

$$\left(\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{X_{\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{X_{1-\alpha/2}^2}\right)$$

Veamos un ejemplo práctico:

La puntuación media de una muestra de 20 jueces de gimnasia rítmica, elegidos al azar, para una misma prueba, presentó una cuasi desviación típica muestral de 0,0965. Calcular un intervalo de confianza con un 95% para la varianza. (Suponemos que la variable que mide la puntuación sigue una distribución normal.)

Del enunciado del problema se desprenden directamente los siguientes datos:

$$S_{n-1}^2 = 0,00931225. \quad n = 20 \quad 1 - \alpha = 0,95$$

Tenemos que buscar un valor $X_{1-\alpha/2}^2$, de modo que en la distribución chi-cuadrado con 19 grados de libertad deje una área de probabilidad a la derecha igual a $1-\alpha/2$, es decir 0,975 y otro valor $X_{\alpha/2}^2$ que deje una área de probabilidad a la derecha igual a $\alpha/2$, es decir 0,025. Ambos valores se corresponden respectivamente con 8,9065 y 32,852 Así pues el intervalo buscado para la varianza es:

$$\left(19 \cdot \frac{0,00931225}{32,852}, 19 \cdot \frac{0,00931225}{8,9065} \right) = (0,0053, 0,019)$$

Intervalo de confianza para la proporción

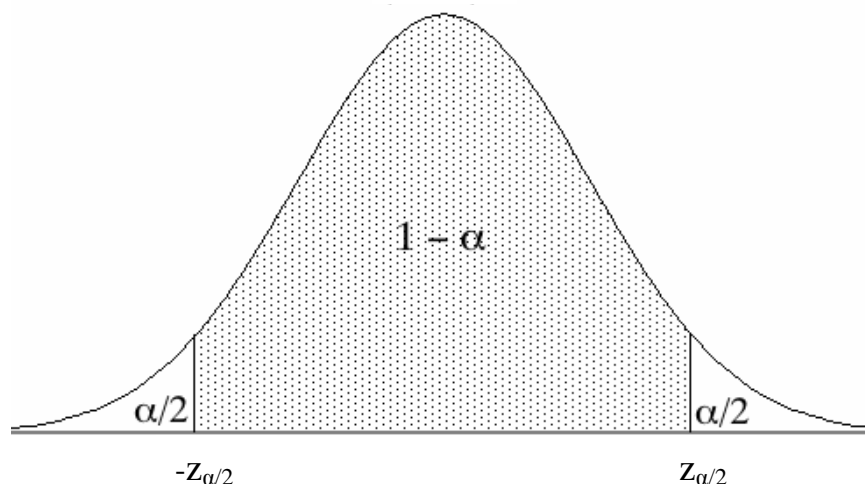
Queremos estimar la proporción p de que ocurra un determinado suceso en una población y tomamos una muestra de tamaño n .

Consideramos la variable aleatoria $X = p'/n$, donde p' es el número de observaciones de ese suceso en la muestra.

La variable X es obviamente una binomial (n, p). Para valores de n grande y p próximos a 0,5, podemos aproximarla mediante una normal de media np y desviación típica $\sqrt{np(1-p)}$, por tanto

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \text{ es una } N(0,1). \text{ Si dividimos por } n \text{ tenemos } \frac{p' - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \text{ es } N(0,1)-$$

Así pues :



$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{p' - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow P\left(p' - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} z_{\alpha/2} < p < p' + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Obteniendo como intervalo de confianza para p

$$\left(p' - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} z_{\alpha/2}, p' + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} z_{\alpha/2}\right)$$

Pero dado que desconocemos p, deberemos sustituirlo por p'.

Una cota para el error es $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} z_{\alpha/2}$ o también $\sqrt{\frac{1}{4n}} z_{\alpha/2}$ puesto que p(1-p) alcanza un un máximo en 1/4¹. y por tanto esta última expresión se podría tomar como radio del intervalo de confianza propuesto.

Veamos un ejemplo práctico:

En una encuesta hecha por alumnos y alumnas de un instituto a un total de 100 votantes elegidos al azar en su Municipio, se obtiene que el 55% volvería a votar al actual alcalde. Calcular un intervalo de confianza al 99% para la proporción de votantes favorables al actual alcalde.

Cuales deberían ser los tamaños muestrales, manteniendo el mismo nivel de confianza, para tener la certeza que el alcalde actual será reelegido por mayoría absoluta

Los datos desprendidos del enunciado del problema son :

$$p' = 0,55 \quad n = 100 \quad 1 - \alpha = 0,99$$

Tenemos que buscar un valor $z_{\alpha/2}$, de modo que en la distribución N(0,1) deje una área de probabilidad a la derecha igual a $\alpha/2$, es decir 0,005. Como la función de distribución de probabilidad de la tabla N (0,1) me da el área de probabilidad acumulada, es decir a la izquierda, tengo que ver que valor de z me deja a la izquierda 0,995, que se corresponde para un valor de z=2,57.

Así pues el intervalo buscado es:

$$\left(0,55 - \sqrt{\frac{0,55 \cdot 0,45}{100}} \cdot 2,57, 0,55 + \sqrt{\frac{0,55 \cdot 0,45}{100}} \cdot 2,57\right) = (0,55 - 0,1278, 0,55 + 0,1278)$$

$$(0,4222, 0,6778)$$

En la segunda parte del problema, si queremos que tenga mayoría absoluta, el margen de error no puede ser inferior a 0,05. La explicación es ésta: Puesto que la mayoría absoluta la obtiene con más de 0,50 de proporción, y la proporción muestral me ha dado 0,55, y como el intervalo de confianza está centrado en 0'55, el radio de dicho intervalo, es decir el margen de confianza, no puede ser superior a 0'05, ya que si fuese 0,06 por ejemplo, cabría la posibilidad de que el valor de la proporción poblacional fuese 0,55-0,06 = 0,49 con lo cual el alcalde no tendría la mayoría absoluta.

Así pues el planteamiento es hacer el margen de error menor que 0,05, es decir:

¹ La derivada de p(1-p) es 1-2p que se anula en p=1/2. Su segunda derivada es -2, por tanto en p=1/2 presenta un máximo, que al ser sustituido en la función inicial se obtiene 1/4.

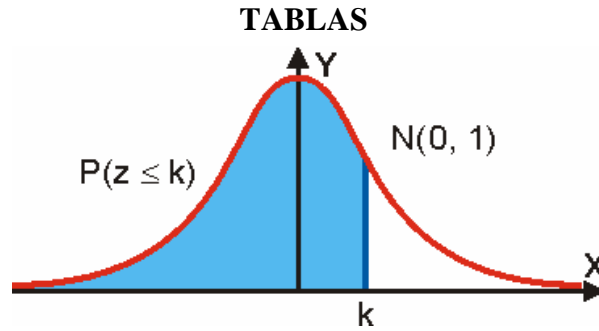
$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} z_{\alpha/2} < 0.05 \text{ que en nuestro caso es:}$$

$$\sqrt{\frac{0.55 \cdot 0.45}{n}} \cdot 2.57 < 0.05 \text{ de donde se obtiene } n > 653.88$$

En consecuencia, el número mínimo del tamaño de la muestra para poder tener certeza de que el alcalde va a tener mayoría absoluta con un 99% de confianza es 654

Ejercicios propuestos y resueltos de Estimación por intervalos de confianza, pueden descargarse en:

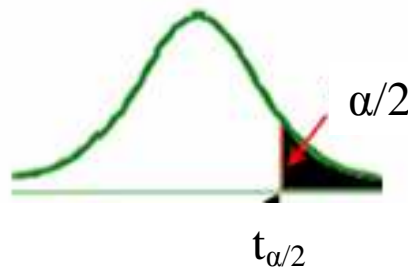
<http://www.iesxunqueira1.com> en la sección “Taboleiros / Departamentos”.



ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR, $N(0, 1)$

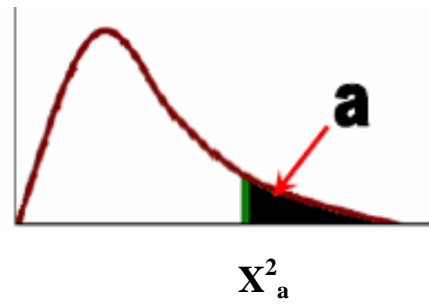
z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN t-STUDENT con cola a la derecha.



gl	0.4	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.326	31.596
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.706
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
Infinito	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

TABLA CHI-CUADRADO DE COLA A LA DERECHA



grados libertad	0,1	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001
v	$\alpha=0,100$	$\alpha=0,050$	$\alpha=0,025$	$\alpha=0,010$	$\alpha=0,005$	$\alpha=0,001$
1	2,70554397	3,84145915	5,02388647	6,63489671	7,87943869	10,8275662
2	4,60517019	5,99146455	7,37775891	9,21034037	10,5966347	13,8155106
3	6,25138846	7,81472776	9,34840357	11,3448667	12,8381564	16,2662362
4	7,77944034	9,48772904	11,1432868	13,2767041	14,860259	18,466827
5	9,23635694	11,0704978	12,832502	15,0862725	16,7496024	20,5150057
6	10,6446407	12,5915872	14,4493753	16,8118938	18,5475842	22,4577445
7	12,0170366	14,0671404	16,0127643	18,4753069	20,2777399	24,3218863
8	13,3615661	15,5073131	17,5345461	20,090235	21,954955	26,1244816
9	14,6836566	16,9189776	19,0227678	21,6659943	23,5893508	27,8771649
10	15,9871792	18,3070381	20,4831774	23,2092512	25,1881796	29,5882984
11	17,2750085	19,6751376	21,9200493	24,7249703	26,7568489	31,2641336
12	18,5493478	21,0260698	23,3366642	26,2169673	28,2995188	32,9094904
13	19,8119293	22,3620325	24,7356049	27,6882496	29,8194712	34,528179
14	21,0641442	23,6847913	26,118948	29,1412377	31,3193496	36,1232737
15	22,3071296	24,9957901	27,4883929	30,5779142	32,8013206	37,6972982
16	23,5418289	26,2962276	28,8453507	31,9999269	34,2671865	39,2523548
17	24,7690353	27,5871116	30,1910091	33,4086636	35,7184657	40,7902167
18	25,9894231	28,8692994	31,5263784	34,8053057	37,1564515	42,3123963
19	27,2035711	30,1435272	32,8523269	36,1908691	38,5822565	43,820196
20	28,4119806	31,4104329	34,1696069	37,5662348	39,9968463	45,3147466
21	29,6150894	32,6705734	35,4788759	38,9321727	41,4010648	46,797038
22	30,8132823	33,9244385	36,7807121	40,2893604	42,795655	48,2679423
23	32,0068997	35,1724616	38,0756273	41,6383981	44,1812752	49,7282325
24	33,1962443	36,4150285	39,3640771	42,9798201	45,5585119	51,1785978
25	34,381587	37,6524841	40,6464692	44,3141049	46,9278902	52,6196558
26	35,5631712	38,8851386	41,9231702	45,6416827	48,2898823	54,0519624
27	36,7412168	40,1132721	43,194511	46,9629421	49,6449153	55,4760202
28	37,9159226	41,3371381	44,4607918	48,2782358	50,9933763	56,8922854
29	39,0874698	42,5569678	45,7222858	49,5878845	52,3356178	58,3011735
30	40,2560238	43,7729718	46,9792422	50,8921814	53,6719619	59,7030643
31	41,4217359	44,9853432	48,2318896	52,1913949	55,0027039	61,098306
32	42,5847451	46,1942594	49,4804377	53,4857719	56,328115	62,487219
33	43,7451796	47,3998838	50,72508	54,7755398	57,6484453	63,8700985
34	44,9031576	48,6023674	51,9659952	56,0609088	58,9639259	65,2472175
35	46,0587885	49,8018496	53,2033485	57,3420734	60,2747709	66,6188289
36	47,212174	50,9984602	54,4372936	58,6192145	61,5811792	67,9851676