PROBLEMAS RESUELTOS DE ESTIMACIÓN POR INTERVALOS DE CONFIANZA

1)*Un nadador obtiene los siguientes tiempos, en minutos, en 10 pruebas cronometradas por su entrenador: 41,48 42,34 41,95 41,86 41,60 42,04 41,81 42,18 41,72 42,26.*
Obtener un intervalo de confianza para la marca promedio de esta prueba con un 95% de confianza, suponiendo que se conoce por otras pruebas que la desviación típica para este nadador es de 0,3 minutos. Si el entrenador quiere obtener un error en la estimación de la media de este nadador inferior a tres segundos, ¿cuántas pruebas debería cronometrar?

SOLUCIÓN:
Para dar un intervalo de confianza de la media conocida la desviación típica, utilizamos es estadístico pivote:

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$ y para 1-α = 0,95 el intervalo de confianza es:

$(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}})$ ¿Quién es en nuestro caso $z_{\frac{\alpha}{2}}$?. Es un valor tal que en la tabla de la normal, sabemos que $F(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$ ya que $\alpha = 0{,}05$ *y* $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ por tanto $z_{\frac{\alpha}{2}}$=1,96. Dado que nuestra media muestral $\overline{X}$ = 41,924 , el tamaño muestral n=10 y σ = 0,3, sustituyendo se obtiene el intervalo:
(41,924 – 0,186 , 41,924 + 0,186). El valor 0,186 se llama margen de error.
El intervalo para la media es (41,738 , 42, 11)
Esto es lo mismo que decir que la media es 41,924 ± 18,6 %. Es decir que la media se estima en 41,92 con un margen de error de ± 18,6 %

2*) La puntuación promedio de una muestra de 20 jueces de gimnasia rítmica, elegidos al azar, para una misma prueba presentó una media de 9,8525 y una cuasi desviación típica muestral de 0,0965. Calcular un intervalo de confianza con un 95% para la nota media.*
(Se sobreentiende que la puntuación de la prueba sigue una distribución normal)

SOLUCIÓN:

Hay que utilizar el estadístico pivote $\vec{g}(\overline{X},\mu) = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} \in t_{n-1}$ dado que no conocemos la desviación típica poblacional y si conocemos la cuasi desviación típica muestral.
Se ha de verificar que $P(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < \vec{g}(\overline{X},\mu) < t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}95$. Despejando μ de la expresión, resulta que $P(\overline{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}.\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}})$ = 0,95.
Buscando en la tabla de la t de Student para 19 grados de libertad, puesto que n = 20 y 1-α = 0,95, resulta que α=0,05 tenemos que $t_{19,0.025} = 2{,}0930$ de donde se deduce que el intervalo de confianza para la media poblacional es

$$(9{,}8525 - 2{,}0930.\frac{0{,}0965}{\sqrt{20}}, 9{,}8525 + 2{,}0930.\frac{0{,}0965}{\sqrt{20}}) = (9{,}807 , 9{,}897)$$

El valor correspondiente al radio del intervalo se llama margen de error y su valor es 0,0451.
El resultado puede ser expresado del siguiente modo:
La media poblacional se estima en 9,8525 con un margen de error de ± 4,5%

3) *Un entrenador de fútbol está interesado en estimar, con un 99% de confianza, la fuerza máxima de los músculos cuadriceps de los futbolistas. Admitiendo que dicha fuerza sigue una distribución normal, selecciona al azar una muestra de 25 futbolistas, para la que obtuvo una media de 85 Nw y una cuasivarianza de 144. Determinar un intervalo de confianza para la media y otro para la varianza de la fuerza máxima de estos músculos.*

SOLUCIÓN:

Para la media, el estadístico pivote es como en el ejercicio anterior $\vec{g}(\overline{X},\mu)=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}\in t_{n-1}$ de forma que $P(\overline{X}-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}.\dfrac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}.\dfrac{S_{n-1}}{\sqrt{n}})$ =0,99

Buscando en la tabla de la t de Student para 24 grados de libertad, puesto que n = 25 y 1-α = 0,99, resulta que α=0,01 tenemos que $t_{24,0.005}=2{,}7970$ de donde se deduce que el intervalo de confianza para la media poblacional es

$$(85-2{,}7970.\frac{12}{\sqrt{25}}\ ,85+2{,}7970.\frac{12}{\sqrt{25}})=(78{,}287{,}91{,}713)$$

El valor correspondiente al radio del intervalo se llama margen de error y su valor es 6,7128.
El resultado puede ser expresado del siguiente modo:
La media poblacional se estima en 85 Nw con un margen de error de ± 6,7 Nw con un nivel de confianza del 99%. Esto último quiere decir que de cada 100 veces que calculemos la media de una muestra de 25 individuos, en 99 ocasiones el valor de la media poblacional está contenido en el intervalo obtenido.
Para hacer una estimación por Intervalos para la varianza hay que utilizar es estadístico pivote siguiente: $g(S^2{}_{n-1},\sigma^2)=\dfrac{(n-1)S^2_{n-1}}{\sigma^2}\in X^2_{n-1}$ que es una distribución chi-cuadrado con n-1 grados de libertad.
Resulta que hemos de partir de que: $P(X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}<g(S^2_{n-1},\sigma^2)<X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}})$ = 0,99

Despejando el parámetro σ^2 , resulta que el intervalo de confianza es:
$(\dfrac{(n-1)S^2_{n-1}}{X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}\ ,\dfrac{(n-1)S^2_{n-1}}{X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}})$. Buscando en la tabla de la chi cuadrado para 24 grados de libertad, puesto que n = 25 y 1-α = 0,99, resulta que α=0,01 tenemos que
$X^2_{24,0.005}=45{,}558 \quad y \quad X^2_{24,0.995}=9{,}8862$ de donde se deduce que el intervalo de confianza para la varianza poblacional es $(\dfrac{24.144}{45{,}558},\dfrac{24.144}{9{,}8862})=(75{,}85 \quad , \quad 349{,}57)$

4) *En una encuesta hecha por los alumnos y alumnas de un Instituto a un total de 100 votantes elegidos al azar en su Ayuntamiento, se indica que el 55% volvería a votar por el alcalde actual. Calcular un intervalo de confianza al 99% e otro al 99,73% para la proporción de votantes favorables al alcalde actual.*

SOLUCIÓN:

Para obtener un intervalo de confianza de una proporción, el pivote estadístico es:

$g(\widehat{p}, p) = \dfrac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} \in N(0,1)$, siendo $\widehat{p}$ la proporción muestral y p la proporción poblacional. De este modo resulta el intervalo de confianza para un nivel de confianza 1-α el siguiente: $(\widehat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \; , \; \widehat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}})$. En nuestro caso 1-α = 0,99 y α/2=0,005

Vamos a la tabla de la normal y calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ cuyo valor es 2,57, de modo que el intervalo de confianza pedido es: $(0{,}55 - 2{,}57\sqrt{\dfrac{0{,}55.0{,}45}{100}} \quad , \quad 0{,}55 + 2{,}57\sqrt{\dfrac{0{,}55.0{,}45}{100}})$

= (0,422 , 0,677)

Para un nivel de confianza del 99,73% es exactamente igual que lo anterior exceptuando el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ ya que ahora tenemos: 1-α = 0,9973 y α/2=0,00135 Vamos a la tabla de la normal y calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ cuyo valor es 2,98, de modo que el intervalo de confianza pedido es:

$(0{,}55 - 2{,}98\sqrt{\dfrac{0{,}55.0{,}45}{100}} \quad , \quad 0{,}55 + 2{,}98\sqrt{\dfrac{0{,}55.0{,}45}{100}})$ = (0,401 , 0,698)

5) *¿Cuáles deben ser los tamaños muestrales en el sondeo del problema anterior para tener, con los mismos niveles de confianza, la certeza de que el alcalde actual salga reelegido por mayoría absoluta, en el caso de arrojar la encuesta los mismos resultados?*

SOLUCIÓN:

Nos piden el valor de n condicionado a que todos los valores del intervalo de confianza sean superiores a 0,5 (mayoría absoluta), es decir que, dado que la media muestral es 0,55, el radio del intervalo ha de ser necesariamente menor que 0,55-0,5 = 0,05.

Esto provoca que, en el caso del nivel de confianza del 99%, que $2{,}57\sqrt{\dfrac{0{,}55.0{,}45}{n}} < 0{,}05$, de donde al despejar n resulta n>653,8. Como mínimo n ha de ser 654.

Para 99,73% el proceso es análogo y se obtiene n>891.

6) *En una encuesta a 360 alumnos de un centro, elegidos al azar, resultaron 190 a favor de la política del actual equipo directivo. ¿Cuál es el intervalo de confianza, con nivel del 95%, para la proporción de alumnos que apoyan a esta dirección?*

SOLUCIÓN:
Hay que averiguar un intervalo de confianza para estimar una proporción, donde resulta que el valor del parámetro en la muestra elegida es $\widehat{p}$ = 190/360 = 0,5278.

Para obtener un intervalo de confianza de una proporción, el pivote estadístico es:

$g(\widehat{p},p)=\dfrac{\widehat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}}\in N(0,1)$, siendo $\widehat{p}$ la proporción muestral y p la proporción poblacional. De este modo resulta el intervalo de confianza para un nivel de confianza 1-α el siguiente: $(\widehat{p}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\ ,\ \widehat{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}})$. En nuestro caso 1-α = 0,95 y α/2=0,025

Vamos a la tabla de la normal y calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ cuyo valor es 1,96 de modo que el intervalo de confianza pedido es:

$$(0{,}5278-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5278.0{,}4722}{360}}\quad,\quad 0{,}5278+1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5278.0{,}4722}{360}})\quad=(0{,}4762\ ,\ 0{,}5794)$$

O dicho en otros términos, la proporción de alumnos que apoyan a la junta directiva es del orden del 52,7% con un margen de error de ±5,15%

7) Se lanza una moneda 100 veces y se obtienen 62 cruces. ¿Cuál es el intervalo de confianza para la proporción de cruces con un 99% de nivel de confianza?

SOLUCIÓN:
Hay que averiguar un intervalo de confianza para estimar una proporción, donde resulta que el valor del parámetro en la muestra elegida es $\widehat{p}$ = 0,62.
Para obtener un intervalo de confianza de una proporción, el pivote estadístico es:

$g(\widehat{p},p)=\dfrac{\widehat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}}\in N(0,1)$, siendo $\widehat{p}$ la proporción muestral y p la proporción poblacional. De este modo resulta el intervalo de confianza para un nivel de confianza 1-α el siguiente: $(\widehat{p}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\ ,\ \widehat{p}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}})$. En nuestro caso 1-α = 0,99 y α/2=0,005

Vamos a la tabla de la normal y calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ cuyo valor es 2,57 de modo que el intervalo de confianza pedido es:

$$(0{,}62-2{,}57.\sqrt{\frac{0{,}62.0{,}38}{100}}\ ,0{,}62+2{,}57.\sqrt{\frac{0{,}62.0{,}38}{100}})=(0{,}495\ ,\ 0{,}745)$$

8) *Para estimar el número de ranas que hay en un estanque procedemos a pescar cierta cantidad, 30, y las marcamos con un anillo, devolviéndolas al estanque. Transcurridos unos días volvemos a pescar otro montón y observamos qué proporción están marcadas con la anilla. Es esta última pesca obtenemos 100 ranas de las que 7 están marcadas. Calcular un intervalo al 99% de confianza para la proporción de ranas marcadas.*

SOLUCIÓN:
Hay que averiguar un intervalo de confianza para estimar una proporción, donde resulta que el valor del parámetro en la muestra elegida es $\widehat{p}$ = 0,07.
Para obtener un intervalo de confianza de una proporción, el pivote estadístico es:

$g(\widehat{p}, p) = \dfrac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} \in N(0,1)$, siendo $\widehat{p}$ la proporción muestral y p la proporción poblacional. De este modo resulta el intervalo de confianza para un nivel de confianza 1-α el siguiente: $\left(\widehat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\ ,\ \widehat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)$. En nuestro caso 1-α = 0,90 y α/2=0,05

Vamos a la tabla de la normal y calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ cuyo valor es 1,64 de modo que el intervalo de confianza pedido es:

$$(0{,}07 - 1{,}64.\sqrt{\frac{0{,}07.0{,}93}{100}}\ ,0{,}07 + 1{,}64.\sqrt{\frac{0{,}07.0{,}93}{100}}) = (0{,}02816;0{,}11184)$$

9) *Calcula un intervalo de confianza, con un 90%, para el número total, N, de ranas del estanque del problema anterior, teniendo en cuenta que la proporción de ranas marcadas es p= 30/N*

SOLUCIÓN:

Como el intervalo de confianza de ranas marcadas en el ejercicio anterior (iguales condiciones de confianza que en el presente) es (0,02816 ; 0,11184). Esto quiere decir que como 30/N oscila entre ambos extremos del intervalo, ocurre que:
30/N = 0,02816, de donde N= 1065,34 y por otra parte, como máximo, 30/N=0,11184, de donde N = 268,24. Por tanto nuestro intervalo es (269 , 1065).

10) *De una muestra elegida al azar de 10 alumnos de la clase, se obtuvieron los siguientes datos para el peso (en Kg) y la estatura (en cm.)*

Peso	*74*	*79*	*85*	*49*	*83*	*78*	*74*	*54*	*63*	*68*
Estatura	*176*	*178*	*180*	*165*	*182*	*177*	*179*	*165*	*172*	*170*

Calcular, suponiendo que las variables peso y estatura se adecúan a una distribución normal, un intervalo de confianza para cada variable, con un nivel de confianza del 95%, tanto para las medias como para las varianzas.

SOLUCIÓN:

Datos muestrales:

	Media $\overline{X}$	Cuasi desv. Tipi. S_{n-1}
Peso	70,7	12,093
Estatura	174,4	6,096

a) Intervalo de confianza para la media del peso:

Hay que utilizar el estadístico pivote $\vec{g}(\overline{X},\mu)=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}\in t_{n-1}$ dado que no conocemos la desviación típica poblacional y si conocemos la cuasi desviación típica muestral.

Se ha de verificar que $P(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}<\vec{g}(\overline{X},\mu)< t_{n-1,\frac{\alpha}{2}})=0{,}95$. Despejando μ de la expresión, resulta que $P(\overline{X}-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}.\dfrac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}.\dfrac{S_{n-1}}{\sqrt{n}})$ = 0,95.

Buscando en la tabla de la t de Student para 9 grados de libertad, puesto que n = 10 y 1-α = 0,95, resulta que α=0,05 tenemos que $t_{9,0.025}=2{,}2622$ de donde se deduce que el intervalo de confianza para la media poblacional es $(70{,}7-2{,}2622.\dfrac{12{,}093}{\sqrt{10}}\,,\,70{,}7+2{,}2622.\dfrac{12{,}093}{\sqrt{10}})=(62{,}05\,,\,79{,}35)$

b) Intervalo de confianza para la media de la estatura:

Exactamente igual que en el apartado a) tan solo sustituir los valores correspondientes a las medidas muestrales de la estatura, quedando por tanto el intervalo:

$$(174{,}4-2{,}2622.\frac{6{,}096}{\sqrt{10}}\,,174{,}4+2{,}2622.\frac{6{,}096}{\sqrt{10}})=(170{,}04\,,178{,}76)$$

c) Intervalo de confianza para la varianza del peso:

Para hacer una estimación por Intervalos para la varianza hay que utilizar es estadístico pivote siguiente: $g(S^2{}_{n-1},\sigma^2)=\dfrac{(n-1)S^2_{n-1}}{\sigma^2}\in X^2_{n-1}$ que es una distribución chi-cuadrado con n-1 grados de libertad.

Resulta que hemos de partir de que: $P(X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}<g(S^2_{n-1},\sigma^2)<X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}})$ = 0,95

Despejando el parámetro σ^2 , resulta que el intervalo de confianza es:

$(\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{X^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}} , \frac{(n-1)S_{n-1}^2}{X^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}})$. Buscando en la tabla de la chi cuadrado para 24 grados de libertad, puesto que n = 10 y 1-α = 0,95, resulta que α=0,05 tenemos que $X^2_{9,0.025} = 19,023 \quad y \quad X^2_{9,0.975} = 2,7004$ de donde se deduce que el intervalo de confianza para la varianza poblacional es $(\frac{9.146,24}{19,023} , \frac{9.146,24}{2,7004})$ = (69,188 , 487,39)

d) Intervalo de confianza para la varianza de la estatura:

Análogamente a lo efectuado en el apartado c) se obtiene como intervalo (17,58 , 123,85)