1) Encuentra la solución general para cada una de las siguientes progresiones geométricas:
a) $a_{n+1} - 1{,}5\, a_n = 0,\ n \geq 0$; b) $4\, a_n - 5\, a_{n-1} = 0,\ n \geq 1$;
c) $3\, a_{n+1} - 4\, a_n = 0,\ n \geq 0,\ a_1 = 5$; d) $2\, a_n - 3\, a_{n-1} = 0,\ n \geq 1,\ a_4 = 81$;

SOLUCIÓN:

a) Se trata de una progresión geométrica de razón 1,5. Por tanto la solución general es $a_n = a_0(1{,}5)^n$
b) Se trata de una progresión geométrica de razón 5/4. Por tanto la solución general es $a_n = a_1(5/4)^{n-1}$
c) Se trata de una progresión geométrica de razón 4/3. Sabiendo que $a_1=5$, tenemos que la solución general es $a_n = 5(4/3)^{n-1}$
d) Se trata de una progresión geométrica de razón 3/2. Sabiendo que $a_4=81$, tenemos que $81=a_1.(3/2)^3$, de donde $a_1= 24$ la solución general es $a_n = 24(3/2)^{n-1}= 3^n.2^{n-4}$

2.) Si a_n, $n \geq 0$, es una solución de la relación de recurrencia $a_{n+1} - d\, a_n = 0$ y $a_3 = 153/49$, $a_5 = 1377/2401$, ¿cuánto vale d?

SOLUCIÓN:

Al tratarse de una progresion geométrica de razón d, tenemos que
$a_5 = a_3.d^2$, es decir que $d^2 = (1377/2401).(49/153) = 9$
$d = \pm 3$

3.) Hace quince años se invirtieron las ganancias de un negocio en una cuenta que pagaba un 8% de interés anual con pagos trimestrales. Si ahora el saldo de la cuenta es de 7.218,27 €, ¿cuál fue la inversión inicial?

SOLUCIÓN:
Método 1: Si a_n es el capital al cabo del trimestre n, resulta que
$a_n = a_{n-1}+ (0{,}08/4)a_{n-1}$, es decir una relación de recurrencia $a_n - 1{,}02\, a_{n-1} = 0$ que es una geométrica de razón 1,02 y cuya solución general es $a_n = c(1{,}02)^n$
Si el saldo de la cuenta al cabo de 15 años (60 trimestres) es 7.218,27 resulta que
a_{60} = 7.218,27, de donde podemos averiguar c, ya que $c = \dfrac{7218{,}27}{(1{,}02)^{60}} = 2200$

La inversión incial es $a_0 = 2200$

Método 2:
Para deducir la fórmula que me da el capital, hagamos lo siguiente. Llamemos C_0 al capital inicial y C_i al que tenemos al cabo del trimestre i.
Al cabo del primer trimestre tendremos $C_1=C_0+(0{,}08/4)C_0 = C_0\, (1+(0'08/4))$
Al cabo del segundo trimestre tendremos $C_2=C_1+(0{,}08/4)\, C_1=C_0(1+(0'08/4))^2$
Al cabo de los 15 años (60 trimestres) tendremos $C_{60}=C_0(1+(0{,}08/4))^{60}$

Es una progresión geométrica de razón 1+(0’08/4) =1,02. Aplicando los datos del ejercicio, tenemos:

$7218{,}27 = C_0.\ (1{,}02)^{60}$; de donde C_0 = 2200 €

4. Sea x_1, x_2, …, x_{20} una lista de números reales distintos que deben ordenarse mediante el método de la burbuja. (a) ¿Después de cuántas comparaciones estarán ordenados en forma ascendente los diez números más pequeños de la lista? (b) ¿Cuántas comparaciones más se necesitan para terminar la ordenación?

SOLUCIÓN:
Necesito 19 comparaciones para que el menor de todos quede en la primera posición.
18 para el segundo y así sucesivamente hasta el 10º.
El número de comparaciones hasta quedar ordenados los diez números más pequeños de la lista sería: 19+18+17+16+15+14+13+12+11+10 = 145

b) Faltan para completar la ordenación 9+8+7+6+5+4+3+2+1= 45

5.) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia:
a) $a_n = 5\, a_{n-1} + 6\, a_{n-2} = 0,\ n \ge 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3;$
b) $2\, a_{n+2} - 11\, a_{n+1} + 5\, a_n = 0,\ n \ge 0,\ a_0 = 2,\ a_1 = -8;$
c) $3\, a_{n+1} = 2\, a_n + a_{n-1} = 0,\ n \ge 1,\ a_0 = 7,\ a_1 = 3;$
d) $a_{n+2} + a_n = 0,\ n \ge 0,\ a_0 = 0,\ a_1 = 3;$
e) $a_{n+2} + 4\, a_n = 0,\ n \ge 0,\ a_0 = a_1 = 1;$
f) $a_n - 6\, a_{n-1} + 9\, a_{n-2} = 0,\ n \ge 2,\ a_0 = 5,\ a_1 = 12;$
g) $a_n + 2\, a_{n-1} + 2\, a_{n-2} = 0,\ n \ge 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3;$

SOLUCIÓN:

a) $a_n - 5\, a_{n-1} - 6\, a_{n-2},\ n \ge 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3$

Busco una p.g. $a_n = c.r^n$ que verifique la relación de recurrencia, es decir:

$c.r^n - 5.cr^{n-1} - 6.cr^{n-2} = 0$; sacando factor común a cr^{n-2} obtenemos
$c.r^{n-2}(r^2-5r-6) = 0.$
La ecuación característica es $r^2-5r-6 = 0$, cuyas soluciones son 6 y -1

Entonces $a_n=c.6^n$ y $a_n = c.(-1)^n$ son soluciones buscadas, como son linealmente independientes, la solución general es $a_n = c_1.6^n + c_2.(-1)^n$. Para hallar c_1 y c_2, hacemos uso de que $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

Si $a_0=1$, tenemos que $1 = c_1 + c_2$
Si $a_1=3$, tenemos que $3 = 6c_1 - 2c$

Resolviendo el sistema, $c_1= 4/7$ y $c_2 = 3/7$.
La solución general es

$$\mathbf{a_n = (4/7)6^n+(3/7)(-1)^n} \text{ con } n\ge 0$$

b) $2\, a_{n+2} - 11\, a_{n+1} + 5\, a_n = 0,\ n \ge 0,\ a_0 = 2,\ a_1 = -8$

Busco una p.g. $a_n = c.r^n$ que verifique la relación de recurrencia, es decir:

$2c.r^{n+2} - 11.cr^{n+1} + 5.cr^n = 0$; sacando factor común a cr^n obtenemos

$$c.r^n(2r^2-11r+5) = 0.$$

La ecuación característica es $2r^2-11r+5 = 0$, cuyas soluciones son 5 y (1/2)

Entonces $a_n=c.5^n$ y $a_n = c.(1/2)^n$ son soluciones buscadas, como son linealmente independientes, la solución general es $a_n = c_1.5^n + c_2.(1/2)^n$. Para hallar c_1 y c_2, hacemos uso de que $a_0 = 2$, $a_1 = -8$.

Como $a_0=2$, tenemos que $2 = c_1 + c_2$

Si $a_1=-8$, tenemos que $-8 = 5c_1 +(1/2)c_2$

Resolviendo el sistema, $c_1= -2$ y $c_2 = 4$.

La solución general es

$$\mathbf{a_n = -2.5^n+4(1/2)^n} \text{ con } n\geq 0$$

c) ***$3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} = 0, n \geq 1, a_0 = 7, a_1 = 3$***

$3a_{n+1} - 2a_n - a_{n-1} = 0$. Sucesión recurrente lineal homogénea de orden 2.

Procediendo de forma análoga a los casos anteriores, la ecuación característica es

$3r^2 - 2r - 1 = 0$

cuyas soluciones son 1 y -1/3

Entonces $a_n=c.$ y $a_n = c.(-1/3)^n$ son soluciones buscadas, como son linealmente independientes, la solución general es $a_n = c_1 + c_2.(-1/3)^n$. Para hallar c_1 y c_2, hacemos uso de que $a_0 = 7$, $a_1 = 3$.

Como $a_0=7$, tenemos que $7 = c_1 + c_2$

Si $a_1=3$, tenemos que $3 = c_1 +(-1/3)c_2$

Resolviendo el sistema, $c_1= 4$ y $c_2 = 3$.

La solución general es

$$\mathbf{a_n = 4+3(-1/3)^n} \quad \text{con } n\geq 0$$

d) ***$a_{n+2} + a_n = 0, n \geq 0, a_0 = 0, a_1 = 3$***

$a_{n+2} + a_n = 0$. Es lineal y homogénea de grado 2 ya que podemos considerarla así: $a_{n+2} + a_n + 0.a_{n-1} = 0$. Entonces la ecuación característica es $r^2+1=0$, cuyas soluciones son i, -i.

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2} \;;\; -i = \cos\frac{-\pi}{2} + isen\frac{-\pi}{2}$$

La solución general será $a_n = c_1.i^n + c_2.(-i)^n$. Por el Teorema de Moivre

$$a_n = c_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i.sen\frac{n\pi}{2}) + c_2(\cos\frac{-n\pi}{2} + i.sen\frac{-n\pi}{2})$$

Teniendo en cuenta que cos(-a)=cos(a) y que sen (-a)=-sen(a), tenemos

$$a_n = c_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i.sen\frac{n\pi}{2}) + c_2(\cos\frac{n\pi}{2} - i.sen\frac{n\pi}{2})$$

Si llamamos $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2).i$

$$a_n = k_1.\cos\frac{n\pi}{2} + k_2.sen\frac{n\pi}{2}$$

Como $a_0=0$, tenemos que $0 = k_1$

Como $a_1=3$, tenemos que $3 = k_2$

La solución general es

$a_n = 3sen(n\pi/2)$ con n≥0

e) ***$a_{n+2} + 4\, a_n = 0,\ n \geq 0,\ a_0 = a_1 = 1$***

$a_{n+2} + 4\, a_n = 0$. Ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$, con soluciones complejas ± 2i

$$2i = 2(\cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}) \qquad -2i = 2(\cos\frac{-\pi}{2} + isen\frac{-\pi}{2})$$

La solución general será $a_n = c_1.(2i)^n + c_2.(-2i)^n$. Por el Teorema de Moivre

$$a_n = 2^n[c_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i.sen\frac{n\pi}{2}) + c_2(\cos\frac{-n\pi}{2} + i.sen\frac{-n\pi}{2})]$$

Teniendo en cuenta que cos(-a)=cos(a) y que sen (-a)=-sen(a), tenemos

$$a_n = 2^n[c_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i.sen\frac{n\pi}{2}) + c_2(\cos\frac{n\pi}{2} - i.sen\frac{n\pi}{2})]$$

Si llamamos $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2).i$

$$a_n = 2^n(k_1.\cos\frac{n\pi}{2} + k_2.sen\frac{n\pi}{2})$$

Como $a_0=1$, tenemos que $1 = k_1$

Como $a_1=1$, tenemos que $1 = 2.k_2$; $k_2 = 1/2$

La solución general es

$a_n = 2^n (\cos(n\pi/2)+(1/2)sen(n\pi/2))$ con n≥0

f) ***$a_n - 6\, a_{n-1} + 9\, a_{n-2} = 0,\ n \geq 2,\ a_0 = 5,\ a_1 = 12$***

La ecuación característica es $r^2 - 6r + 9 = 0$, cuyas solución es 3 (solución doble)

En este caso se toma como solución general $a_n = c_1(3)^n + c_2.n\,(3)^n$

$5 = c_1$ y $12 = 5.3 + 3c_2$, de donde $c_2 = -1$

La solución general es

$a_n = (5 - n)3^n$ con n≥0

g) ***$a_n + 2\, a_{n-1} + 2\, a_{n-2} = 0,\ n \geq 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3$***

Ecuación característica $r^2 + 2r + 2 = 0$; soluciones complejas -1-i, -1+i

$$-1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + isen\frac{3\pi}{4}) \ ; \ -1-i = \sqrt{2}(\cos\frac{-3\pi}{4} + isen\frac{-3\pi}{4})$$

La solución general será $a_n = c_1.(-1+i)^n + c_2.(-1-i)^n$. Por el Teorema de Moivre

$$a_n = (\sqrt{2})^n[c_1(\cos\frac{n3\pi}{3} + i.sen\frac{n3\pi}{4}) + c_2(\cos\frac{-n3\pi}{4} + i.sen\frac{-n3\pi}{4})]$$

Teniendo en cuenta que cos(-a)=cos(a) y que sen (-a)=-sen(a), tenemos

$$a_n = (\sqrt{2})^n[c_1(\cos\frac{n3\pi}{4} + i.sen\frac{n3\pi}{4}) + c_2(\cos\frac{n3\pi}{4} - i.sen\frac{n3\pi}{4})]$$

Si llamamos $k_1 = c_1 + c_2$ y $k_2 = (c_1 - c_2).i$

$$a_n = (\sqrt{2})^n[k_1.\cos\frac{n3\pi}{4} + k_2.sen\frac{n3\pi}{4}]$$

Como a_0=1, tenemos que $1 = k_1$

Como a_1=3, tenemos que $3 = (\sqrt{2})\ (\frac{-\sqrt{2}}{2} + k_2\frac{\sqrt{2}}{2})$; $k_2 = 4$

La solución general es

$$a_n = (\sqrt{2})^n(\cos\frac{n3\pi}{4} + 4.sen\frac{n3\pi}{4}) \quad \text{con } n\geq 0$$

6.) Si $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ y $a_3 = 37$ satisfacen la relación de recurrencia $a_{n+2} + b\, a_{n+1} + c\, a_n = 0$, donde $n \geq 0$ y b, c son constantes, encuentra a_n.

SOLUCIÓN:

Según la recurrencia tenemos que $a_2 + b.\ a_1 + c.a_0 = 0$; es decir 4 + b = 0; b=-4
Según la recurrencia tenemos que $a_3 + b.\ a_2 + c.a_1 = 0$; es decir 37 – 4.4 + c = 0; c = -21

La ecuación característica de la recurrencia es $r^2 - 4r - 21 = 0$, cuyas soluciones son 7 y -3. Por lo que la solución general es

$$a_n = c_1(7)^n + c_2(-3)^n$$

Como $a_0 = 0$; $0 = c_1+c_2$
Como $a_1 = 1$; $1 = c_1 7 - 3c_2$, de donde resulta que $c_2 = -1/10$ y $c_1 = 1/10$

La solución general es: $a_n = \frac{1}{10}(7^n - (-3)^n)$

7.) Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de formas de estacionar motos y coches en una fila de n espacios si cada moto ocupa un espacio y cada coche ocupa dos. Las motos se consideran idénticas, los coches también y se quiere utilizar todos los espacios.

SOLUCIÓN:
Sea a_n el número de estacionar motos y coches en n espacios en las condiciones dadas.
Sea a_n^m el número de los anteriores cuyo último espacio esté ocupado por una moto.
Sea a_n^c el número de los anteriores cuyo último espacio esté ocupado por un coche. Es obvio que en el espacio anterior lo ocupa el mismo coche, puesto que un coche ocupa dos espacios por tanto $a_n^c = a_{n-2}$, ya que da igual que dos espacios atrás lo ocupe un coche o una moto y por tanto tengo todas las posibilidades que son a_{n-2}
Por otra parte si supongo que el último espacio de los n es una moto, el anterior puede ser una moto o un coche, por lo que tengo todas las posibilidades en n-1 espacios, es decir a_{n-1}, esto quiere decir que $a_n^m = a_{n-1}$

Como $a_n = a_n^c + a_n^m$, tenemos que $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ para n≥2. a_1=1 (En un espacio solo puede estacionar una moto: 1 caso), a_2=2 (En dos espacios pueden estacionar dos motos o un coche: 2 casos). Es una sucesión de Fibonacci.
Vamos a resolverla:
Sabemos que la sucesión de Fibonacci para n≥0 es

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, como en este caso partimos de a_1=1, ya que a_0 no nos vale, la sucesión es:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] = F_{n+1}$$

8.)Para n ≥ 0, sea a_n el número de formas en que una sucesión de unos y doses suma n. Por ejemplo, a_3 = 3, pues (1) 1, 1, 1; (2) 1, 2; (3) 2, 1 suman 3. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para a_n.

SOLUCIÓN:

Sea a_n el número de formas en que una sucesión de unos y doses suma n.
Sea a_n^1 el número de los anteriores cuya última cifra sea un 1. Resulta evidente que $a_n^1 = a_{n-1}$
Sea a_n^2 el número de los anteriores cuya última cifra sea un 2. Resulta evidente que $a_n^2 = a_{n-2}$.
Por tanto $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para n≥2 con a_1=1 y a_0=0. Cuya solución general es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] = F_{n+1} \text{ con } n\geq 1$$

9.) Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de formas de apilar n fichas de póker de color rojo, blanco, verde y azul, de modo que no haya fichas azules consecutivas.

SOLUCIÓN:
a_0 =1 (la disposición vacía sin fichas)
a_1= 4 (Para una ficha hay 4 casos: la verde, la roja, la blanca o la azul)
a_2 = $RV_{4,2} - 1 = 15$ (el que resta es el caso (Azul, azul))
Sea en general a_n = el nº de formas en apilar las n fichas sin que haya dos azules consecutivas.
Llamemos $a_n^r, a_n^v, a_n^b, a_n^a$ al número de casos de los anteriores cuya última ficha es roja, verde, blanca y azul respectivamente.
Se verifica que: $a_n = a_n^r + a_n^v + a_n^b + a_n^a$

Ahora bien; $a_n^r = a_n^v = a_n^b = a_{n-1}$ pues se trata de añadir una ficha de color rojo o verde o blanco al número de formas de apilar n-1 fichas. (*)
El problema surge con a_n^a pues se trata de añadir una ficha azul al numero de formas de apilar n-1 fichas *cuya última ficha no sea azul*. Esto es que su última ficha sea roja, verde o blanca.
Por tanto $a_n^a = a_{n-1}^r + a_{n-1}^v + a_{n-1}^b$, pero razonando como antes $a_{n-1}^r = a_{n-1}^v = a_{n-1}^b = a_{n-2}$

Por tanto $a_n^a = 3a_{n-2}$

La recurrencia buscada es entonces: $a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}$ con $n \geq 2$ y $a_1=4$ y $a_2=15$

Vamos a resolverla: La ecuación característica es $r^2-3r-3 = 0$, cuyas soluciones son reales y distintas:

$$\frac{3+\sqrt{21}}{2}, \frac{3-\sqrt{21}}{2}$$

La solución general de nuestra sucesión es $a_n = c_1\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^n$

Como $a_0 = 1$ $\quad 1=c_1+c_2$

Como $a_1 = 4$ $\quad 4 = c_1\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) - c_1\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)$

resolviendo el sistema de ecuaciones resulta que $c_1 = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ y $c_2 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$

por lo que la solución buscada es

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^n - \left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^n$$ para $n \geq 0$

10.) Un alfabeto S consta de los cuatro caracteres numéricos 1, 2, 3, 4 y los siete caracteres alfabéticos a, b, c, d, e, f, g. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para el número de palabras de longitud n en S, tales que no aparezcan caracteres alfabéticos consecutivos.

SOLUCIÓN:

Si los a_n buscados acaban en número, la cantidad de ellos es a_{n-1} ya que el anterior puede ser letra o número y por tanto son todos los casos de n-1 caracteres. Como tenemos 4 números, la cantidad total de los que acaban en número es $4.a_{n-1}$.
Si los a_n buscados acaban en letra, los anteriores necesariamente han de acabar en número. Así pues, los a_n que acaban en una letra de las dadas son todos los casos cuyo caracter anterior es número, que razonando como en el primer párrafo son $4.a_{n-2}$, pero como tenemos 7 letras, el total de los acabados en letra es $28\, a_{n-2}$.
La relación de recurrencia buscada es

$$a_n = 4.a_{n-1} + 28.\, a_{n-2}$$

Su ecuación característica es $r^2 - 4r - 28 = 0$, cuyas soluciones son los números reales $2+4\sqrt{2}, \quad 2-4\sqrt{2}$. Por tanto la solución general es

$$a_n = c_1\left(2+4\sqrt{2}\right)^n + c_2\left(2-4\sqrt{2}\right)^n$$

Considerando $a_0 = 1$ (caracter vacío) y $a_1=11$

$1=c_1 + c_2$

$11 = c_1\left(2+4\sqrt{2}\right) + c_2\left(2-4\sqrt{2}\right)$

resolviendo el sistema se obtiene $c_1=\dfrac{8+9\sqrt{2}}{16}$ y $c_2=\dfrac{8-9\sqrt{2}}{16}$

La solución general es:

$$a_n = \left(\frac{8+9\sqrt{2}}{16}\right)\left(2+4\sqrt{2}\right)^n + \left(\frac{8-9\sqrt{2}}{16}\right)\left(2-4\sqrt{2}\right)^n$$

11.) Resuelve las relaciones de recurrencia realizando una transformación apropiada:

a) $(a_{n+2})^2 - 5(a_{n+1})^2 + 4(a_n)^2 = 0; \quad n \geq 0, \quad a_0 = 4, \quad a_1 = 13$

b) $\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}} - 2\sqrt{a_{n-2}} = 0; n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 1$

c) $na_n + na_{n-1} - a_{n-1} = 2^n; \quad n \geq 1, a_0 = 10$

d) $(a_n)^3 - 2a_{n-1} = 0; \quad n \geq 1, a_0 = 8$

e) $a_n = \dfrac{\sqrt{a_{n-1}}}{(a_{n-2})^2}, n \geq 0; a_0 = 1, a_1 = 2$

SOLUCIÓN:

a) Hacemos $(a_n)^2 = b_n$. La recurrencia es equivalente a:

$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = 0; \quad n \geq 0, b_0 = 16, b_1 = 169$, que es lineal homogénea de orden 2.

Su ecuación característica es $r^2 - 5r + 4 = 0$ que tiene por soluciones 4 y 1.

La solución general es

$b_n = c_1(4)^n + c_2$. De las condiciones iniciales se obtiene el sistema

$16 = c_1 + c_2$ y $169 = 4c_1 + c_2$, obteniéndose que $c_1= 51$ y $c_2 = -35$

$b_n = 51.(4)^n - 35$, por tanto $a_n = \sqrt{51.(4)^n - 35}$

b) Hacemos $\sqrt{a_n} = b_n$, obteniéndose la siguiente relación de recurrencia lineal y homogenea de orden 2:

$$b_n - b_{n-1} - 2b_{n-2} = 0; \quad n \geq 2, b_0 = b_1 = 1$$

La ecuación característica es $r^2 - r - 2 = 0$, cuyas soluciones son 2 y -1

La solución general para b_n es:

$b_n = c_1(2)^n + c_2(-1)^n$. De las condiciones iniciales se sigue el sistema siguiente:

$1 = c_1+c_2$ y $1=2c_1 - c_2$, resolviendola se obtiene $c_1 = 2/3$ y $c_2 = 1/3$

por lo que

$b_n = \frac{2}{3}(2)^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}\left[2^{n+1} + (-1)^n\right]$. La solución final en a_n es

$$a_n = (b_n)^2 = \frac{1}{9}\left[2^{n+1} + (-1)^n\right]^2$$

c) Simplificamos a $na_n + (n-1)a_{n-1} = 2^n$; $n \geq 1,\ a_0 = 10$

Hacemos el siguiente cambio $b_n = n.a_n$, y obtenemos la ecuación no homogénea
$b_n + b_{n-1} = 2^n$; $n \geq 1$ $b_0 = 0.10 = 0$
Para resolver esta recurrencia se considera la homogénea asociada que es
$b_n + b_{n-1} = 0$; $n \geq 1$ con solución $c(-1)^n$ y buscamos otra solución del tipo $A(2)^n$ en la general, de tal modo que $A.2^n + A.2^{n-1} = 2^n$. Dividiendo por 2^{n-1}, resulta:
2A + A = 2, de donde A=2/3.
La solución general es $b_n = \frac{2}{3}2^n + c(-1)^n$, puesto que b_0=0, tenemos que
0 = c + (2/3), de donde c= -2/3.
quedando entonces: $b_n = \frac{2}{3}\left[2^n - (-1)^n\right]$ como $a_n = b_n/n$
resulta que $a_n = \frac{2}{3n}\left[2^n - (-1)^n\right]$ para n≥1 y con a_0=10

d) $(a_n)^3 - 2a_{n-1} = 0$; $n \geq 1,\ a_0 = 8$

Hago el cambio siguiente $b_n = \log_2(a_n)$ Así b_0=3

$(a_n)^3 = 2a_{n-1}$, tomando $\log_2$ nos queda $3\log_2(a_n) = \log_2 2 + \log_2(a_{n-1})$, quedando entonces $3b_n - b_{n-1} = 1$ con b_0=3
; la solución general para el caso homogéneo es $c(1/3)^n$
y busco otra solución del tipo $A(1)^n$. que al sustituir en la recurrencia da 3A-A = 1, por lo que A=1/2.

La solución general es $b_n = c\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}$, como 3 = c + ½ , c = 5/2

$b_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 5\right]$, deshaciendo el cambio inicial $a_n = 2^{b_n}$

por tanto la solución pedida es $a_n = 2^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n + 5\right]}$

e) $a_n = \frac{\sqrt{a_{n-1}}}{(a_{n-2})^2}$, $n \geq 0;\ a_0 = 1,\ a_1 = 2$
Como a_0 y a_1 son potencias de 2. Tomo $b_n = \log_2(a_n)$, de este modo b_0=0 y b_1=1

Tomando $\log_2$ en la recurrencia tenemos que:

$\log_2(a_n) = \frac{1}{2}\log_2(a_{n-1}) - 2\log_2(a_{n-2})$, que al hacer el cambio nos queda la siguiente recurrencia lineal y homogenea de orden 2 $b_n - \frac{1}{2}b_{n-1} + 2b_{n-2} = 0$ con $b_0=0$ y $b_1=1$ cuya ecuación característica es $r^2 - (1/2)r + 2 = 0$, que para resolver más cómodamente transformo en $2r^2-r+4=0$ cuyas soluciones son

$\frac{1+i\sqrt{31}}{4}$, $\frac{1-i\sqrt{31}}{4}$, que vamos a pasar a la expresión polar para trabajar de un modo más sencillo.

En ambos casos el módulo de ambas soluciones es $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2} = \sqrt{2}$

el argumento de la primera solución es $\theta = arctg\left(\sqrt{31}\right)$= 1,3931 radianes

el argumento de la segunda solución es $\theta = arctg\left(-\sqrt{31}\right) = -1{,}3931$ radianes

Nota teórica:

Recordemos que si un número complejo es de la forma a + bi. En forma polar se expresa mediante su módulo r = $\sqrt{a^2 + b_2}$ *y su argumento* $\theta = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$

Siendo su expresión trigonométrica r(cosθ+isenθ)

Así pues nuestras soluciones las podemos escribir como:

$\sqrt{2}(\cos\theta + isen\theta)$; $\sqrt{2}(\cos\theta - isen\theta)$ ya que cos (-θ) = cos θ y sen (-θ) = - sen θ

Por tanto la solución general de nuestra sucesión b_n será:

$b_n = c_1\left[\sqrt{2}(\cos\theta + isen\theta)\right]^n + c_2\left[\sqrt{2}(\cos\theta - isen\theta)\right]^n$ por la fórmula de Moivre tenemos:

$b_n = c_1\left(\sqrt{2}\right)^n(\cos n\theta + isenn\theta) + c_2\left(\sqrt{2}\right)^n(\cos n\theta - isenn\theta)$ que podemos simplificar en

$k_1\left(\sqrt{2}\right)^n \cos n\theta + k_2\left(\sqrt{2}\right)^n (senn\theta)$ siendo $k_1= c_1 + c_2$ y $k_2 = i(c_1-c_2)$

Teniendo en cuenta que $b_0=0$ y $b_1=1$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$0 = k_1$ y $1 = k_2\left(\sqrt{2}\right)(sen\theta)$, de donde $k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}.sen\theta}$

La solución para b_n es $b_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} sen\, n\theta}{sen\theta}$

Y la solución para a_n pedida es.

$$a_n = 2^{\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} sen\, n\theta}{sen\theta}}$$

siendo $\theta = arctg\left(\sqrt{31}\right)$= 1,3931 radianes

12. Demuestra que dos números de Fibonacci consecutivos son primos relativos.

SOLUCIÓN:
Lo hago por reducción al absurdo suponiendo que entre los a_n números de Fibonacci existen dos consecutivos que no son primos relativos, a partir de a_3, (Puesto que la sucesión es $a_0= 0, a_1= 1, a_2= 1, a_3= 2...$ y por tanto $a_1= 1, a_2= 1$ no son primos relativos) es decir que
$\exists k \in \mathrm{N} / a_k \quad y \ a_{k-1}$ no son primos entre sí, con $k\geq 4$.

Como $a_k > a_{k-1}$, $\exists p \in \mathrm{N}, p > 1 / a_k = p.a_{k-1}$
Como se verifica que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, En particular para k, $a_k = a_{k-1} + a_{k-2}$,
$p.a_{k-1} = a_{k-1} + a_{k-2}$; $a_{k-1} (p-1) = a_{k-2}$. Sabemos que p>1, por lo que pueden ocurrir dos casos:
Si p =1, resulta que $a_{k-2} = 0$, y para k>3 no existe ningún número de Fibonacci que sea 0.
Si p>1, entonces a_{k-2} es $\geq a_{k-1}$, lo cual es falso para todo número de Fibonacci ya que es una sucesión estrictamente creciente. Falsedad que resulta de suponer que existen dos consecutivos que no son primos.

13.) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia:
a) $a_{n+1} - a_n = 2n+3 \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$
b) $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n \quad n \geq 0 \quad a_0 = 3$ ***(Propuesto en el examen de Febrero 2009)***
c) $a_{n+1} - a_n = 5 \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$
d) $a_n + n a_{n-1} = n! \quad n \geq 1 \quad a_0 = 1$
e) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$

SOLUCIÓN:
a) $a_{n+1} - a_n = 2n+3 \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$
$a_1 = a_0 + 3$
$a_2 = a_1 + 5 = (a_0 + 3) + 5 = a_0 +(3 + 5)$
$a_3 = a_2 + 7 = ...$ $= a_0 +(3 + 5+7)$

En general $a_n = a_0 + \sum_{i=o}^{n-1} (2i+3)$ El segundo sumando es la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética cuya solucion es $\frac{(3+2(n-1)+3)n}{2} = n^2 + 2n$

Nota teórica:
Recordemos que en una progresión aritmética $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ la suma de esos n primeros términos (pues empezamos en a_0) de la misma es $(a_0+a_{n-1}).n/2$
(primer término + último término). nº de términos/2

Por tanto la sucesión buscada es $a_n = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ con $n\geq 0$

b) $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n \quad n \geq 0 \quad a_0 = 3$
$a_1 = a_0 + 3.0^2-0$
$a_2 = a_1 + 3.1^2-1= (a_0 + 3.0^2-0) + + 3.1^2-1 = a_0 +3(0^2+1^2)-(0+1)$
$a_3 = a_2 + 3.2^2-2= ....$ $= a_0 +3(0^2+1^2+2^2)-(0+1+2)$

Esto es:

$$a_n = a_0 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i$$

Para hallar ambos sumatorios utilizamos la función sumatoria vista en el temario.
Hay que hallar en primer lugar la función generatriz asociada a $1^2x+2^2x^2+3^2x^3+..$
Procedemos como siempre a partir de la función $f(x) = 1+x+x^2+x^3+... = 1/(1-x)$
Derivamos y obtenemos $1+2x+3x^2+4x^3+... = 1/(1-x)^2$
Multiplico por x y tengo $x+2x^2+3x^3+4x^4+... = x/(1-x)^2$
vuelvo a derivar: $1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+... = (1+x)/(1-x)^3$
Multiplico por x para llegar a la función buscada, es decir $1^2x+2^2x^2+3^2x^3+...= x(1+x)/(1-x)^3$.

Sabemos pues que $\sum_{i=1}^{n} i^2$ es el coeficiente de x^n de la función $x(1+x)/(1-x)^4$

que es:

$$\binom{-4}{n-2}+\binom{-4}{n-1}=\binom{n+1}{n-2}+\binom{n+2}{n-1}=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{(n+2)(n+1)n}{6}=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

Hacemos lo mismo para el otro sumatorio:
Hay que hallar en primer lugar la función generatriz asociada a $1x+2x^2+3x^3+..$
Procedemos como siempre a partir de la función $f(x) = 1+x+x^2+x^3+... = 1/(1-x)$
Derivamos y obtenemos $1+2x+3x^2+4x^3+... = 1/(1-x)^2$
Multiplico por x y tengo $x+2x^2+3x^3+4x^4+... = x/(1-x)^2$
que ya es la función buscada.

Sabemos pues que $\sum_{i=1}^{n} i$ es el coeficiente de x^n de la función $x/(1-x)^3$ que es:

$$\binom{-3}{n-1}=\binom{n+1}{n-1}=\frac{(n+1)n}{2}$$

Por tanto la sucesión buscada es $a_n = 3+3.\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$ - $\frac{(n+1)n}{2} = 3+n(n-1)^2$

Método 2 (por funciones generatrices)
He de encontrar la función generatriz de la sucesión cuyo coeficiente de x^n es el término general a_n buscado., es decir
$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...$ Si la multiplico por -x, obtengo
$-xf(x) = -a_0.x-a_1x^2-a_2x^3+...$
Sumando ambas expresiones resulta:
$(1-x)f(x) = 3 + (a_1-a_0)x + (a_2-a_1)x^2+... = 3 + (3.1^2-1)x^2+(3.2^2-2)x^3+(3.3^2-3)x^4+ ... = 3+3(x^2+2^2x^3+3^2x^4+4^2x^5+...) – (x^2+2x^3+3x^4+...) = 3+3x^2(1+2^2x+3^2x^2+...)- x^2(1+2x+3x^2+...) =$

$3+\frac{3x^2(1+x)}{(1-x)^3}-\frac{x^2}{(1-x)^2}$, por tanto $f(x) = \frac{3}{1-x}+\frac{(3x^2+3x^3)}{(1-x)^4}-\frac{x^2}{(1-x)^3}$, cuyo coeficiente de grado n es

$$3+3\binom{-4}{n-2}+3\binom{-4}{n-3}-\binom{-3}{n-2}=3+3\binom{n+1}{n-2}+3\binom{n}{n-3}-\binom{n}{n-2}=3 + n(n-1)^2$$

c) $a_{n+1} - 2a_n = 5 \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$
Método 1 (clásico)

La solución de la homogénea es $c(2)^n$ y por otra parte busco una solución del tipo $A(1)^n$ verificando la recurrencia, es decir:
A-2A = 5, por lo que A=-5. Entonces la solución general es $a_n=-5+c(2)^n$
Como $a_0=1$, tenemos 1=-5+c, de donde c=6. La solución es $-5+6.2^n$

Método 2 (por funciones generatrices)
He de encontrar la función generatriz de la sucesión cuyo coeficiente de x^n es el término general a_n buscado., es decir
$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...$ Si la multiplico por -2x, obtengo
$-2xf(x) = -2\, a_0x - 2\, a_1x^2 +...$
Sumando ambas igualdades resulta:
$(1-2x)f(x) = a_0+5x+5x^2+5x^3+.... = 1+5(x+x^2+...) = 1+5\left(\frac{1}{1-x}-1\right) = \frac{4x+1}{1-x}$, por tanto

$f(x) = \frac{4x+1}{(1-2x)(1-x)}$ que resolvemos por el método de los coeficientes indeterminados

$\frac{4x+1}{(1-2x)(1-x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}$; A(1-x)+B(1-2x) = 4x+1
Para x=1, tenemos –B = 5; B=-5;
Para x=1/2, tenemos (1/2)A =3; A =6
Finalmente $f(x) = \frac{6}{1-2x} - \frac{5}{1-x}$, cuyo coeficiente de x^n es 6.2^n-5
ya que $f(x) = 6(1+2x+2^2x^2+...+2^nx^n+...) - 5(1+x+x^2+...+x^n+...)$

d) $a_n + na_{n-1} = n! \quad n \geq 1 \quad a_0 = 1$
Escribámosla así**:** $a_n = n! - na_{n-1} \quad n \geq 1 \quad a_0 = 1$
$a_1=0$; $a_2=2!$; $a_3=0$; $a_4=4!$.... En general $a_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \quad impar \\ n! & si \quad n \quad par \end{cases}$

e) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n \quad n \geq 0 \quad a_0 = 1$

La solución de la homogénea es $c(2)^n$; como la posible solución de la no homogénea sería $A(2)^n$ resultan ambas linealmente dependientes por lo que hay que buscar otra solución del tipo $An.2^n$, que sustituida en la relación de recurrencia produce la siguiente igualdad:
$A(n+1).2^{n+1} - 2.A.n.2^n = 2^n$; dividiendo por 2^n tengo $A(n+1).2 - 2An = 1$
es decir 2A = 1; de donde A=1/2.
La solución general será: $a_n = c(2)^n+(1/2)n.2^n$; como $a_0=1$ resulta que c=1
La solución final es:

$$a_n = 2^n(1+\frac{n}{2}) = 2^{n-1}(n+2)$$

14.) El primero de Noviembre se depositaron 1000 € en una cuenta que paga intereses mensualmente a razón de un 6% anual. Al principio de cada mes, se realizará un ingreso por valor de 200 €. Si se continúa realizando esto durante los próximos cuatro años, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta tras esos cuatro años?

SOLUCIÓN:

Sea a_n el dinero que habrá en la cuenta a primeros del mes enésimo.

Es obvio que $a_n = a_{n-1} + \frac{0,06}{12} a_{n-1} + 200$. Tenemos la relación de recurrencia siguiente:

$a_n - 1,005 a_{n-1} = 200$ para $n \geq 1$ y $a_0=1000$

Resolvemos dicha relación de recurrencia:
Una solución para la homogénea es $c(1,005)^n$ y buscamos una solución de la recurrencia del tipo $A(1)^n$, de modo que:
A-1,005A = 200, de donde A =- 40000
Entonces la solución general de nuestra relación de recurrencia es:

$a_n = c(1,005)^n - 40000$. Teniendo en cuenta que $a_0=1000$, tenemos que

$1000 = c - 40000$, de donde c = 41000
La solución final es:

$a_n = 41000(1,005)^n - 40000$.

Por tanto al cabo de 4 años (es decir 48 meses) tendremos a_{48} – 200 ya que en ese mes no contamos los 200 depositados, pues el depósito finaliza.
$a_{48} - 200 = 41000.\ (1,005)^{48} - 40000 - 200 =$ 11.890,05 €

15.) Resuelve la relación de recurrencia

$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n) + 7(3^n) \quad n \geq 0, a_0 = 1, a_1 = 4$

SOLUCIÓN:

En primer lugar buscamos la solución particular para la correspondiente homogénea, es decir para $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$ cuya ecuación característica es
r^2-6r+9=0 que tiene por raiz doble 3. Por tanto la solución es
$c_1(3^n)+c_2.n(3^n)$.

Buscamos a continuación una solución para $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 3(2^n)$

Lo intentamos con la forma $A(2^n)$, de modo que
$A(2^{n+2})-6A(2^{n+1})+9(2^n)=3(2^n)$; dividiendo por 2^n, resulta que 4A – 12 A + 9 A = 3; de donde A = 3.

Buscamos por último una solución para $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 7(3^n)$

Como $c_1(3^n)+c_2.n(3^n)$ era ya solución particular para la homogénea, tenemos que intentarlo con $Bn^2(3^n)$, de modo que
$B(n+2)^2(3^{n+2})-6B(n+1)^2(3^{n+1})+9Bn^2(3^n)=7(3^n)$; dividiendo por 3^n, resulta:
$9B(n+2)^2-18B(n+1)^2+9Bn^2=7$; obteniendo que B=7/18
Por tanto la solución general es de la forma:

$a_n = c_1.3^n + c_2.n.3^n + \frac{7}{18} n^2.3^n + 3.2^n$; como a_0 =1, y a_1=4, tenemos:

1= c_1+3; de donde c_1=-2
4= -2.3+ c_2.3 + (7/18).3+3.2; c_2=17/18

$$a_n = -2.3^n + \frac{17}{18}.n.3^n + \frac{7}{18}n^2.3^n + 3.2^n = \frac{1}{2}(7n^2 + 17n - 36).3^{n-2} + 3.2^n$$

16.) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia utilizando funciones generatrices:

a) $a_{n+1} - a_n = 3^n$ **,** n≥0 y a_0=1**.**

b) $a_{n+1} - a_n = n^2$ **,** n≥0 y a_0=1**.**

c) $a_n - 3a_{n-1} = 5^{n-1}$**,** n≥1 y a_0=1

d) $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$**,** n≥0 y a_0=1, a_1=6

e) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$**,** n≥0 y a_0=1, a_1=2

SOLUCIÓN:

a) Sea f(x) la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$

entonces $- x. f(x) = \quad -a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 + ...$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$(1-x) f(x) = 1 + 3^0x + 3^1x^2 + 3^2 x^3 + ...$

Multiplico por 3 y obtengo $3(1-x)f(x) = 3 + 3^1x+ 3^2x^2 + 3^3 x^3 + ... = \frac{1}{1-3x} + 2$

(Recordemos que $1/(1-3x) = 1 + 3^1x+ 3^2x^2 + 3^3 x^3 + ...$)

Por tanto $f(x) = \dfrac{\frac{1}{1-3x}+2}{3(1-x)} = \dfrac{1-2x}{(1-x)(1-3x)} = \dfrac{A}{1-x} + \dfrac{B}{1-3x}$ de donde

A(1-3x) + B (1-x) = 1-2x

Para x=1, -1 = -2A; A = 1/2

Para x=1/3 B= 1/2 . Así pues tenemos que el coeficiente de grado x^n de $\frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1-3x}$ es $(1/2) + (1/2).3^n$.

La solución pedida es entonces: $a_n = \frac{1}{2}(1+3^n)$

b) Sea f(x) la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$

entonces $- x. f(x) = \quad -a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 + ...$

Sumando ambas expresiones, resulta:

$(1-x) f(x) = 1 + 0^2 x + 1^2 x^2 + 2^2 x^3 + 3^2 x^4 + ...$

Para obtener la función generatriz del miembro de la derecha hago lo siguiente:

Sea $h(x) = 1+x+x^2+... \quad = 1/(1-x)$
$h'(x) = 1+2x+3x^2 + 4x^3+ ... = 1/(1-x)^2$
$x.h'(x) = x+2x^2+3x^3 + 4x^4+ ... = x/(1-x)^2$

$(x.h'(x))' = 1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+.... = (1+x)/(1-x)^3$
$x^2. (x.h'(x))' = x^2+2^2x^3+3^2x^4+4^2x^5+.... = x^2(1+x)/(1-x)^3$

La función generatriz de $1 + 0^2 x + 1^2 x^2 + 2^2 x^3 + 3^2 x^4 + ... = x^2(1+x)/(1-x)^3 +1$
Por tanto

$$f(x) = \frac{\frac{x^2(1+x)}{(1-x)^3}+1}{1-x} = \frac{4x^2-3x+1}{(1-x)^4}$$ cuyo coeficiente de grado n es:

$$.4\binom{-4}{n-2} - 3\binom{-4}{n-1} + \binom{-4}{n} = 4\binom{n+1}{n-2} - 3\binom{n+2}{n-1} + \binom{n+3}{n} = \frac{(n+1)(2n^2-5n+6)}{6}$$

$$a_n = \frac{(n+1)(2n^2-5n+6)}{6}$$ para n≥0

c) $a_n - 3a_{n-1} = 5^{n-1}$, n≥1 y $a_0=1$

Sea f(x) la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$
entonces $- 3x. f(x) = -3a_0x - 3a_1x^2 - 3a_2x^3 - 3a_3x^4 + ...$
Sumando ambas expresiones, resulta:
$(1-3x) f(x) = 1+5^0 x + 5^1 x^2 + 5^2 x^3 + 5^3 x^4 + ...$
Multiplicando por 5, resulta $5(1-3x)f(x) = 5 + 5^1 x + 5^2 x^2 + 5^3 x^3 + 5^4 x^4 + ...$, cuya función generatriz asociada es (1/(1-5x)) +4
Por tanto tenemos que

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1-5x}+4}{5(1-3x)} = \frac{1-4x}{(1-5x)(1-3x)} = \frac{A}{1-5x} + \frac{B}{1-3x}$$

1-4x = A(1-3x) +B(1-5x)
Para x=1/3, tenemos -1/3 = B.(-2/3); B = 1/2
Para x=1/5, tenemos 1/5 = A(2/5); A = 1/2

La función generatriz es $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-5x} + \frac{1}{1-3x}\right)$ cuyo coeficiente de x^n es

$$\frac{1}{2}\left(5^n + 3^n\right)$$ para n≥1

d) $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, n≥0 y $a_0=1$, $a_1=6$

Sea f(x) la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$
entonces $- 3x. f(x) = -3a_0x - 3a_1x^2 - 3a_2x^3 - 3a_3x^4 + ...$
y... $2x^2.f(x) = 2 a_0 x^2 + 2 a_1x^3 + ...$
Sumando las tres expresiones, resulta:

$(1-3x+2x^2)f(x) = a_0 + (a_1-3\,a_0)x = 1+3x$

$f(x) = (1+3x)/(1-3x+2x^2)$. De donde:

$$\frac{1+3x}{1-3x+2x^2} = \frac{1+3x}{(x-1)(2x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-1}; \qquad 1+3x = A(2x-1)+B(x-1)$$

Para x=1; 4 = A; Para x=1/2; 5/2 = (-1/2)B; B=-5

$f(x) = \frac{-4}{1-x} + \frac{5}{1-2x}$ cuyo coeficiente de grado x^n es:

$$a_n = -4 + 5.2^n$$

e) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$, n≥0 y $a_0=1$, $a_1=2$

Sea f(x) la función generatriz de la sucesión buscada a_n, es decir:

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$

entonces $-2x.\,f(x) = \quad -2a_0x - 2a_1x^2 - 2a_2x^3 - 2a_3x^4 + \ldots$

y... $x^2.f(x) = \quad a_0\,x^2 + a_1x^3 + \ldots$

Sumando las tres expresiones, resulta:

$(1-2x+x^2)f(x) = a_0 + (a_1-2\,a_0)x + 2^0x^2 + 2^1x^3 + 2^2x^4 + \ldots = 1+2^0x^2 + 2^1x^3 + 2^2x^4 + \ldots$ (1)

Sabemos que $1/(1-2x) = 1+ 2^1x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + \ldots$ de modo que si lo multiplico por x^2, obtengo $x^2/(1-2x) = x^2 + 2^1x^3 + 2^2x^4 + 2^3x^5 + 2^4x^6 + \ldots$
que difiere de la expresión (1) en 1.
Por tanto tenemos que
$(1-2x+x^2)f(x) = (x^2/(1-2x))+1$, de donde

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{1-2x}+1}{1-2x+x^2} = \frac{x^2-2x+1}{(1-2x)(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2}{(1-2x)(x-1)^2} = \frac{1}{1-2x}$$

por tanto el coeficiente de x^n es $a_n = 2^n$ con n≥0

17.) Resuelve los siguientes sistemas de relaciones de recurrencia:

a) $\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n - 4b_n \\ b_{n+1} = 4a_n + 6b_n \end{cases}$ ***con n≥0, $a_0=1$; $b_0=0$***

b) $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - b_n + 2 \\ b_{n+1} = -a_n + 2b_n - 1 \end{cases}$ ***con n≥0, $a_0=0$; $b_0=1$***

SOLUCIÓN:

a) Sea f(x) la función generatriz de la sucesión a_n, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Sea g(x) la función generatriz de la sucesión b_n, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Multipliquemos ambas recurrencias por x^{n+1}, obteniendo:

$$a_{n+1}x^{n+1} = -2a_n x^{n+1} - 4b_n x^{n+1}$$

$$b_{n+1}x^{n+1} = 4a_n x^{n+1} + 6b_n x^{n+1}$$

Tomando sumatorios desde 0 hasta ∞ tenemos:

$$\sum_{n(0)}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = -2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 4x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\sum_{n(0)}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} = 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 6x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

que expresadas en términos de f(x) y g(x) sería:

$$f(x) - 1 = -2xf(x) - 4xg(x)$$
$$g(x) = 4xf(x) + 6xg(x)$$

resolviendo este sistema cuyas incógnitas serían las funciones f(x) y g(x), obtenemos:

$$f(x) = \frac{-12x^2 - 4x + 1}{(1+2x)(1-2x)^2} \qquad g(x) = \frac{4x}{(1-2x)^2}$$

Resulta obvio que el coeficiente de x^n de g(x) es 4.(coeficiente de x^{n-1} en $(1-2x)^{-2}$) es decir:

$4\binom{-2}{n-1}2^{n-1} = \binom{n}{n-1}2^{n+1} = n.2^{n+1}$. Por tanto ya tenemos que $b_n=n.2^{n+1}$

Para resolver a_n calculamos el coeficiente de x^n en f(x). para lo que hay que recurrir al método de los coeficientes indeterminados:

$\frac{-12x^2 - 4x + 1}{(1+2x)(1-2x)^2} = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1-2x} + \frac{C}{(1-2x)^2}$. Resolviendo esta igualdad resulta A=0, B=3 y C=-2

Así pues el coeficiente de x^n en la expresión es:

$$3.2^n - 2.\binom{-2}{n}2^n = 3.2^n - 2(n+1)2^n = 2^n(1-2n)$$

b) Sea f(x) la función generatriz de la sucesión a_n, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Sea g(x) la función generatriz de la sucesión b_n, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Multipliquemos ambas recurrencias por x^{n+1}, obteniendo:

$$a_{n+1}x^{n+1} = 2a_n x^{n+1} - b_n x^{n+1} + 2x^{n+1}$$

$$b_{n+1}x^{n+1} = -a_n x^{n+1} + 2b_n x^{n+1} - x^{n+1}$$

Tomando sumatorios desde 0 hasta ∞ tenemos:

$$\sum_{n(0)}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = 2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\sum_{n(0)}^{\infty} b_{n+1}x^{n+1} = -x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - x\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

que expresadas en términos de f(x) y g(x) sería:

$$f(x) = 2xf(x) - xg(x) + \frac{2x}{1-x}$$

$$g(x) - 1 = -xf(x) + 2xg(x) - \frac{x}{1-x}$$

multiplicando por 2 la segunda ecuación y sumándosela a la primera, obtenemos $2g(x) - 2 + f(x) = 3xg(x)$ de donde $f(x) = g(x)(3x-2) + 2$

Sustituyendo en la segunda ecuación tenemos

$g(x) - 1 = -x[g(x)(3x-2) + 2] + 2xg(x) - \frac{x}{1-x}$; desarrollando:

$g(x)(1 + x(3x-2) - 2x) = 1 - 2x - \frac{x}{1-x}$; $g(x)(3x^2 - 4x + 1)(1-x) = 1 - x - 2x(1-x) - x$

$g(x)(1-x)^2(1-3x) = 2x^2 - 4x + 1$; $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)}$

Utilizando el método de los coeficiente indeterminados:

$g(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-3x)}$; A(1-3x)(1-x)+B(1-3x)+C(1-x)^2 = 2x^2-4x+1

Si x= 1; -2 B = -1 ; B = 1/2

Si x=1/3; (4/9)C = -1/9 ; C=-1/4

Si x=0; A+B+C = 1; A=3/4

$\frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{3/4}{(1-x)} + \frac{1/2}{(1-x)^2} - \frac{1/4}{(1-3x)}$, cuyo coeficiente de x^n es

$$b_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\binom{-2}{n} - \frac{1}{4}3^n = \frac{1}{4}\left(2n + 5 - 3^n\right)$$

Puesto que $f(x) = g(x)(3x-2) + 2$ como ya vimos, sustituimos el valor funcional de g(x) obteniendo:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(1-x)^2(1-3x)}(3x-2) + 2 = \frac{x - 2x^2}{(1-x)^2(1-3x)}$$

$\frac{x - 2x^2}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-3x)}$; A(1-3x)(1-x)+B(1-3x)+C(1-x)^2 = x-2x^2

Si x= 1; -2 B = -1 ; B = 1/2

Si x=1/3; (4/9)C = 1/9 ; C=1/4

Si x=0; A+B+C = 0; A=-3/4

$$\frac{x-2x^2}{(1-x)^2(1-3x)} = \frac{-3/4}{(1-x)} + \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/4}{(1-3x)}$$ cuyo coeficiente de x^n es

$$a_n = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\binom{-2}{n} + \frac{1}{4}3^n \quad = \frac{1}{4}\left(2n-1+3^n\right)$$

18) Una partícula se mueve en dirección horizontal. La distancia que recorre en cada segundo es igual a dos veces la distancia que recorre en el segundo anterior. Si a_n denota la posición de la partícula en el segundo n-ésimo, encontrar una relación de recurrencia para a_n (***Propuesto en el examen de Febrero 2009***)

SOLUCIÓN:
Si a_n denota la posición en el segundo n-ésimo y a_{n-1} es la posición de la partícula en el segundo anterior, la distancia recorrida por la partícula en el segundo n-ésimo es $a_n - a_{n-1}$.
Dado que esa distancia es el doble que la recorrida en el segundo anterior ($a_{n-1} - a_{n-2}$), la relación de recurrencia pedida es:

$$a_n - a_{n-1} = 2\,(a_{n-1} - a_{n-2})$$

PROBLEMAS DE LA UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

1) Resolver las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:

a) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ $, n \geq 2, a_0 = 6, a_1 = 8$
b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ $, n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 1$
c) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ $, n \geq 2, a_0 = 4, a_1 = 1$
d) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ $, n \geq 0, a_0 = 2, a_1 = 8$
e) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ $, n \geq 3, a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$
f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ $, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$

SOLUCIÓN:
Método tradicional:
Es una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es $r^2-4r+4=0$ que tiene una raíz doble: 2.
Por tanto su solución general es $c(2)^n+c'n(2)^n$
Según las condiciones inciales: $6 = c$; $8 = 6.2+c'.2$; $c'=-2$
La solución es por tanto:

$$a_n = 2^{n+1}(3-n) \quad n \geq 0$$

Método de funciones generatrices:
Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-4xf(x) = -4xa_0-4a_1 x^2-4a_2x^3 -4a_3x^4 - \ldots$
$4x^2f(x) = +4a_0 x^2+4a_1 x^3+4a_2x^4 +4a_3x^5$
Sumando las tres expresiones:

$(1-4x+4x^2)f(x) = a_0+a_1\,x-4xa_0$; de donde f(x) = $\dfrac{6-16x}{1-4x+4x^2}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{6-16x}{1-4x+4x^2}=\frac{A}{(2x-1)}+\frac{B}{(2x-1)^2}$$

A(2x-1)+B=6-16x ; si x=1/2; B = -2

si x= 0; -A-2 = 6; A = -8

$\dfrac{8}{(1-2x)}-\dfrac{2}{(1-2x)^2}$ siendo el coeficiente de x^n

$8.2^n-2\binom{-2}{n}2^n = 2^{n+3}-2^{n+1}.(n+1)=2^{n+1}(3-n)$ para n≥0

b)

Método tradicional:

Es una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es $r^2-7r+10=0$ que tiene dos raíces reales: 5 y 2.

Por tanto su solución general es $c(2)^n+c'(5)^n$

Según las condiciones iniciales: 2 = c+c'; 1 = 2c+5c'; c'=-1 y c=3

La solución es por tanto:

$$a_n = 3.2^n - 5^n \quad n \ge 0$$

Método de funciones generatrices:

Sea $f(x) = a_0+a_1\,x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.

$-7xf(x) = -7xa_0-7\,a_1\,x^2-7\,a_2x^3 -7\,a_3x^4 - \ldots$

$10x^2f(x) = +10\,a_0\,x^2+10\,a_1\,x^3+10\,a_2x^4 +10\,a_3x^5$

Sumando las tres expresiones:

$(1-7x+10x^2)f(x) = a_0+a_1\,x-7xa_0$; de donde f(x) = $\dfrac{2-13x}{1-7x+10x^2}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{2-13x}{(1-2x)(1-5x)}=\frac{A}{(1-2x)}+\frac{B}{(1-5x)^2}$$

A(1-5x)+B(1-2x)=2-13x; si x=1/5; (3/5)B = -3/5; B=-1

si x= 1/2; (-3/2)A = -9/2; A = 3

$\dfrac{3}{(1-2x)}+\dfrac{-1}{(1-5x)^2}$ siendo el coeficiente de x^n

3.2^n-5^n para n≥0

c)

Método tradicional:

Es una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es $r^2-2r+1=0$ que tiene una raíz doble: 1.

Por tanto su solución general es $c(1)^n+c'n(1)^n$

Según las condiciones iniciales: 4 = c; 1 = c+c'; c'=-3

La solución es por tanto:

$$a_n = 4-3n \quad n \ge 0$$

Método de funciones generatrices:

Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ ...$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-2xf(x) = -2xa_0-2 a_1 x^2-2 a_2x^3 -2 a_3x^4 - ...$
$x^2f(x) = a_0 x^2+ a_1 x^3+ a_2x^4 + a_3x^5$
Sumando las tres expresiones:
$(1-2x+x^2)f(x) = a_0+a_1 x-2xa_0$; de donde $f(x) = \frac{4-7x}{1-2x+x^2}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{4-7x}{(1-x)^2}=\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1-x)^2}$$

$A(1-x)^2+B=4-7x$; si $x=1$; $B = -3$;
si $x= 0$; $A-3 = 4$; $A = 7$

$$\frac{7}{(1-x)}+\frac{-3}{(1-x)^2}$$ siendo el coeficiente de x^n

$$7-3\binom{-2}{n}$$ $= 7-3(n+1) = 4-3n$ para $n\geq 0$

d)
Método tradicional:
Es una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es $r^2+4r-5=0$ que tiene dos raices 1, -5
Por tanto su solución general es $c(1)^n+c'(-5)^n$
Según las condiciones iniciales: $2 = c+c'$; $8 = c-5c'$; $c=3$ y $c'=-1$
La solución es por tanto:

$$a_n = 3-\left(-5^n\right) \quad n\geq 0$$

Método de funciones generatrices:
Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ ...$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$4xf(x) = 4xa_0+4 a_1 x^2+4 a_2x^3 +4 a_3x^4 - ...$
$-5x^2f(x) = -5a_0 x^2-5 a_1 x^3-5 a_2x^4 -5 a_3x^5$
Sumando las tres expresiones:
$(1+4x-5x^2)f(x) = a_0+a_1 x+4xa_0$; de donde $f(x) = \frac{2+16x}{1+4x-5x^2}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{2+16x}{(1-x)(1+5x)}=\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1+5x)}$$

$A(1+5x)+B(1-x)=2+16x$; si $x=-1/5$; $(6/5) B = -6/5$; $B=-1$
si $x= 1$; $6A= 18$; $A = 3$

$$\frac{3}{(1-x)}-\frac{1}{(1+5x)}$$ siendo el coeficiente de x^n

$3-(-5)^n$ para $n\geq 0$

e) $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $n\geq 3, a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$

Método tradicional:
Es una relación de recurrencia homogénea de orden 3 cuya ecuación característica es $r^3-6r^2+11r-6=0$ que tiene tres raices 1, 2, 3

Por tanto su solución general es $c(1)^n+c'(2)^n+c''(3)^n$
Según las condiciones iniciales: 2 = c+c'+c'' ; 5 = c+2c'+3c''; 15 = c+4c'+9c'' de donde c=1 , c'=-1 y c''=2
La solución es por tanto:

$$a_n = 1 - 2^n + 2.3^n \quad n \geq 0$$

Método de funciones generatrices:
Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-6xf(x) = -6xa_0-6 a_1 x^2-6 a_2x^3 -6 a_3x^4 - \ldots$
$11x^2f(x) = 11a_0 x^2+11 a_1 x^3+11 a_2x^4 +11 a_3x^5$
$-6x^3f(x) = -6a_0 x^3-6 a_1 x^4-6 a_2x^5 -6 a_3x^6$
Sumando las cuatro expresiones:
$(1-6x+11x^2-6x^3)f(x) = a_0+a_1 x-6xa_0+a_2x^2-6 a_1x^2+11 a_0x^2= 2-7x+7x^2$;
de donde f(x) = $\frac{2-7x+7x^2}{(1-x)(1-3x)(1-2x)}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{2-7x+7x^2}{(1-x)(1-3x)(1-2x)} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{(1-3x)} + \frac{C}{(1-2x)}$$

$A(1-3x)(1-2x)+B(1-x)(1-2x)+C(1-x)(1-3x) = 2-7x+7x^2$
Si x=1/3; B(2/3)(1/3)=4/9; B = 2
Si x=1; 2A = 2; A=1
Si x=1/2 ; C(1/2)(-1/2)=1/4; C=-1
$\frac{1}{(1-x)} + \frac{2}{(1-3x)} + \frac{-1}{(1-2x)}$ tiene por coeficiente de x^n $1+2.3^n-2^n$

f) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$
Método tradicional:
Es una relación de recurrencia homogénea cuya ecuación característica es $r^2-5r+6=0$ que tiene dos raices: 2 y 3
Por tanto su solución general es $c(2)^n+c'(3)^n$
Según las condiciones iniciales: 1 = c+c'; 0 = 2c+3c'; de donde c'=-2 y c=3
La solución es por tanto:

$$a_n = 3.2^n - 2.3^n \quad n \geq 0$$

Método de funciones generatrices:
Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-5xf(x) = -5xa_0-5a_1 x^2-5 a_2x^3 -5 a_3x^4 - \ldots$
$6x^2f(x) = 6a_0 x^2+ 6a_1 x^3+ 6a_2x^4 + 6a_3x^5$
Sumando las tres expresiones:
$(1-5x+6x^2)f(x) = a_0+a_1 x-5xa_0$; de donde f(x) = $\frac{1-5x}{1-5x+6x^2}$ cuyo coeficiente de x^n es la sucesión que estamos buscando:

$$\frac{1-5x}{1-5x+6x^2} = \frac{A}{(1-3x)} + \frac{B}{(1-2x)}$$

A(1-2x)+B(1-3x)=1-5x; si x=1/2; (-1/2)B = -3/2; B = 3; Si x=1/3; (1/3)A=(-2/3); A=-2 si x= 0; A-3 = 4; A = 7

$\frac{-2}{(1-3x)}+\frac{3}{(1-2x)}$ siendo el coeficiente de x^n

$-2.3^n+3.2^n$ para n≥0

2) Sea an el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos {0,1}, que no tienen dos ceros consecutivos. Encontrar una relación de recurrencia para calcular an y resolverla.

SOLUCIÓN:

Descartamos a_0 pues no tiene sentido para nosotros**.**

Sea a_1=2 (0 y 1) a_2= 3 (01, 10, 11)

Sea a_n el número de palabras pedidas en esas condiciones.

Llamemos a_{n1} a las acabadas en 1 de las a_n

Llamemos a_{n0} a las acabadas en 0 de las a_n

Es obvio que $a_n = a_{n1} + a_{n0}$

Si acaba en 1, la cifra anterior puede ser 1 o 0, con lo que a_{n1} = n-1

Si acaba en 0, la cifra anterior solo puede ser 1, con lo que $a_{n0} = a_{(n-1)1}$ = n-2

Por tanto $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para n>2

La resolvemos:

Su ecuación característica es r^2-r-1=0, cuyas soluciones son $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

La solución general es del tipo

$a_n = c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Bajo las condiciones iniciales a_1=2 y a_2=3, y resolviendo el sistema que generan, tenemos que

La solución es: $a_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ para n≥1

(solución comprobada)

3) Hallar una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

SOLUCIÓN:

Análogo al anterior.

Consideramos a_1=1, ya que tenemos un solo escalón y solo hay la posibilidad de subir un peldaño. Por otra parte a_2 = 2, ya que lo podemos subir de uno en uno o de dos en dos, es decir 11, 2.

Consideremos como antes, lo siguiente:

Sea a_n el número de formas pedidas en esas condiciones.

Llamemos a_{n1} a las a_n cuyo último escalón alcanzo tras subir un peldaño

Llamemos a_{n2} a las a_n cuyo último escalón alcanzo tras subir dos peldaños

Es obvio que $a_n = a_{n1} + a_{n2}$

Si acabo con 1 solo peldaño, el escalón anterior lo puede haber alcanzado subiendo 1 peldaño o dos a_{n1} = n-1
Si llego al último escalón n subiendo dos peldaños, el escalón anterior (n-1) forma parte de esos dos peldaños, con lo que $a_{n2} = a_{(n-1)1}$ = n-2
Por tanto $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para n>2
La resolvemos como antes y el resultado cambia porque cambian las condiciones iniciales (a_1=1, a_2=2). Procediendo como en el problema anterior el resultado final es:

$$a_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$ para n≥1. También se puede expresar así:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] = F_{n+1}$$

Por ejemplo $a_3 = a_2 + a_1 = 3$. En efecto, los casos en que podemos subir 3 escalones son: 111, 21, 12
Por ejemplo $a_4 = a_3 + a_2 = 5$. En efecto, los casos en que podemos subir 4 escalones son: 1111, 121, 112, 211, 22

Este ejercicio es equivalente a este:
Para n ≥ 0, sea a_n el número de formas en que una sucesión de unos y doses suma n. Por ejemplo, a_3 = 3, pues (1) 1, 1, 1; (2) 1, 2; (3) 2, 1 suman 3. Encuentra y resuelve una relación de recurrencia para a_n. (hecho anteriormente)

4.) Sea C = {A, B, C} y sea Sn el conjunto de cadenas de longitud n formadas con las letras de C que tienen un número par de letras A consecutivas. Encontrar una relación de recurrencia para calcular Sn y resolverla.

SOLUCIÓN:
$S_1=0$; $S_2=1$ (AA)
Sea S_n el conjunto pedido.
Sea S_{nA} el conjunto de las anteriores que acaben en A
Sea S_{nB} el conjunto de las anteriores que acaben en B
Sea S_{nC} el conjunto de las anteriores que acaben en C

$S_n = S_{nA} + S_{nB} + S_{nC}$

Si la cadena acaba en B o en C, la cadena de n-1 letras puede acabar en A, B o C indistintamente, con lo que $S_{nB} = S_{nC}$ = n-1

Ahora bien, si la cadena de n letras acaba en A, resulta que la letra anterior tiene que ser A, puesto que si no fuese así tendríamos una A aislada (número impar) Por tanto si acaba en A, resulta que la letra anterior tiene que ser también A, pero la antepenúltima ya puede ser cualquier letra A, B o C. Con lo que $S_{nA} = S_{n-2}$

La relación de recurrencia es
$S_n = 2S_{n-1} + S_{n-2}$
La resolvemos y su ecuación característica es r^2-2r-1=0 cuyas soluciones son $2 \pm \sqrt{2}$
Por tanto la solución general es:
$a_n = c(2+\sqrt{2})^n + c'(2-\sqrt{2})^n$. Como S_1=0; S_2=1, resolviendo el sistema se obtiene que $c = \dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$ $c' = \dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$
La solución es:
$a_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}\right)(2+\sqrt{2})^n + \left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}\right)(2-\sqrt{2})^n$, para n>0

Solución comprobada para n=1,2,3
Para a_3 = 4. En efecto son los casos (AAB, BAA, AAC, CAA)

5) Resolver las siguientes relaciones de recurrencia

a) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \quad , a_1 = 1$
b) $a_n - a_{n-1} = 3n^2, a_0 = 8$
c) $a_n - 3a_{n-1} = 7^n.5, a_0 = 2$
d) $a_n - 3a_{n-1} = 3^n.5, a_0 = 2$
e) $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2$; a_0=11; a_1=1; a_2=-1
f) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n$; a_0=1; a_1=3

SOLUCIÓN:
a) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \quad , a_1 = 1$
Procedemos así:
a_1 =1; a_2 = 1+3; a_3 = 1+3+5 ... en general $a_n = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$ (*)
* 2i-1 para i=1,2... es una progresión aritmética. La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética b_n es $S_n=(b_1+b_n).n/2$.
En nuestro caso $a_n = \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = \dfrac{(1+2n-1)n}{2} = n^2$

b) $a_n - a_{n-1} = 3n^2, a_0 = 8$

Lo haré por funciones generatrices:

Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-xf(x) = -xa_0-a_1 x^2-a_2x^3 - a_3x^4 - \ldots$
Sumando ambas igualdades, resulta
$(1-x)f(x) = 8 + 3(x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\ldots)$
Vamos a deducir la función generatriz asociada a la serie $x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\ldots$
Sea $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1/(1-x)$
$g'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = 1/ (1-x)^2$
$x.g'(x)= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots = x/(1-x)^2$
$(x.g'(x))' = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3+\ldots = (1+x)/(1-x)^3$
$x.(x.g'(x))' = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4+\ldots = x(1+x)/(1-x)^3$

Entonces $(1-x)f(x) = 8 + 3\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. En consecuencia:

$f(x)=\dfrac{8}{1-x}+\dfrac{3x(1+x)}{(1-x)^4}$ cuyo coeficiente de x^n es el término general que estoy buscando para la sucesión a_n

$$a_n = 8+3\binom{-4}{n-1}+3\binom{-4}{n-2}=8+3\binom{n+2}{n-1}+3\binom{n+1}{n-2}=8+\frac{(n+2)(n+1)n}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{2}$$

$$a_n=\frac{2n^3+3n^2+n+16}{2} \quad n\geq 0$$

c) $a_n - 3a_{n-1} = 7^n.5, a_0 = 2$

La recurrencia homogénea asociado es una geométrica de razón 3, por lo que una solución para ésta sería $c(3)^n$. Ahora buscamos una solución en $A(7)^n$ verificando la recurrencia dada, es decir:
$A(7^n)-3 A (7^{n-1}) = 7^n.5$. Dividiendo por 7^{n-1}, tenemos que $7A – 3A = 35$, de donde $A=35/4$
La solución es del tipo $c(3^n)+ (35/4)(7^n)$. Como $a_0=2$, tenemos que $2 = c + (35/4)$, de donde $c = 2 – (35/4) = -27/4$.
La solución general es $a_n=\dfrac{7^{n+1}.5-27.3^n}{4}$ para $n\geq 0$

(Sale bien por funciones generatrices, aunque se hace más pesado)

d) $a_n - 3a_{n-1} = 3^n.5, a_0 = 2$

Pudiera parecer idéntica a la anterior, pero varía en que la solución de la homogénea que es $c(3^n)$ y la supuesta solución para la recurrencia $A(3^n)$ son obviamente dependientes, por lo que en este caso hay que tomar $An(3^n)$ como posible solución de la recurrencia dada, es decir que se verifique:
$An(3^n) – 3A(n-1)(3^{n-1}) = 3^n.5$, divido por 3^{n-1} y obtengo: $3An – 3A(n-1)=15$, de donde

A = 5.
La solución genérica es $(c+5n)3^n$. Como $a_0=2$, tenemos c=2, siendo por tanto la solución $a_n = (2+5n).3^n$ para $n\geq 0$

e) $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2$; $a_0=11$; $a_1=1$; $a_2=-1$

Vamos a resolverlo por funciones generatrices ya que es de orden 3 y es el primero que aparece de este tipo (obsérvese que el coeficiente de a_{n-2} es 0)

Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.
$-3xf(x) = -3xa_0-3 a_1 x^2-3 a_2x^3 -3 a_3x^4 - \ldots$
$4x^3f(x) = 4a_0 x^3+4 a_1 x^4+4 a_2x^5 +4 a_3x^6 + \ldots$
Sumando las tres expresiones:
$(1-3x+4x^3)f(x) = a_0+a_1 x-3xa_0+a_2x^2-3 a_1x^2+(3^2x^3 + 4^2x^4 + 5^2 x^5 + \ldots);$

$$(1-3x+4x^3)f(x)= \left(11-32x-4x^2\right)+\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}-(x+4x^2)$$

$$f(x) = \frac{8x^5+9x^4-86x^3+125x^2-65x+11}{(1-x)^3(1+x)(1-2x)^2} =$$

$$\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{(1-x)^3}+\frac{D}{1+x}+\frac{E}{(1-2x)}+\frac{F}{(1-2x)^2}$$

resultando que
$8x^5+9x^4-86x^3+125x^2-65x+11 =$
$A(1-x)^2(1+x)(1-2x)^2+B(1-x)(1+x)(1-2x)^2+C(1+x)(1-2x)^2+D(1-x)^3(1-2x)^2+$
$+E(1-x)^3(1+x)(1-2x)+F(1-x)^3(1+x)$
Si x=1; 2=2C; C =1
Si x=-1; 288 = 72D; D=4
Si x=1/2; -3/16 = 3F/16 ; F = -1
Si x=0; 11=A+B+1+4+E-1; A+B+E=7
Si x=2; 93=27 A-27B+9E-6; 3A-3B+E=11
Si x=-2; 15A+5B+9E=99
Resolviendo ese sistema de tres ecuaciones con 3 incógnitas, obtenemos
A=8; B=3; E=-4

$$\frac{8}{(1-x)}+\frac{3}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{4}{1+x}+\frac{-4}{(1-2x)}+\frac{-1}{(1-2x)^2}$$, siendo el coeficiente en x^n

$$a_n = 8+3\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+4(-1)^n-4.2^n-\binom{n+1}{n}2^n =$$

$$3n+11+\frac{(n+2)(n+1)}{2}-2^n(n+5)+4(-1)^n$$ para $n\geq 0$

f) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n$; $a_0=1$; $a_1=3$

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n$$

Sea $f(x) = a_0+a_1 x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$ la función generatriz de la sucesión buscada.

$-4xf(x) = -4xa_0 - 4a_1x^2 - 4a_2x^3 - 4a_3x^4 - \ldots$
$4x^2f(x) = 4a_0x^2 + 4a_1x^3 + 4a_2x^4 + 4a_3x^5$
Sumamos
$(1-4x+4x^2)f(x) = a_0 + a_1x - 4xa_0 + (2x^2+3x^3+4x^4+\ldots) = 1 - x + (2x^2+3x^3+4x^4+\ldots)$

Es fácil demostrar que $2x^2+3x^3+4x^4+\ldots = \frac{x}{(1-x)^2} - x$

Por tanto $(1-4x+4x^2)f(x) = 1-2x+\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{-2x^3+5x^2-3x+1}{(1-x)^2}$

$$f(x) = \frac{-2x^3+5x^2-3x+1}{(1-x)^2(1-2x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{(1-2x)^2}$$

$-2x^3+5x^2-3x+1 = A(1-2x)^2(1-x) + B(1-2x)^2 + C(1-x)^2(1-2x) + D(1-x)^2$
Si x=1; 1=B
Si x=1/2; 1/2=D/4; D=2
Si x=0; 1=A+1+C+2; A+C=-2
Si x=2; 3A+C=4; de donde A=3, C=-5

$\frac{3}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{-5}{1-2x} + \frac{2}{(1-2x)^2}$ cuyo coeficiente de x^n es

$a_n = 3 + \binom{n+1}{n} - 5.2^n + 2\binom{n+1}{n}2^n = n+4+2^n(2n-3)$ para $n \geq 0$