1. *Se desea construir un puente sobre el río Pequeniño, que tiene 50m de ancho, siendo este puente colgante. El puente consta de dos cuerdas apoyadas en pilares a cada lado del río, describiendo una curva de ecuación* $y = 3 + \frac{x}{4} + \frac{1}{1+x}$*, y de ellas esta sujeta una pasarela a 5m de distancia por medio de unos tensores.*
a) Dibujar como es el puente con detalle.
b) Busca las alturas máximas y mínimas que alcanza la cuerda.
c) Se quiera poner una mampara para protegerse del sonido en un lado del puente, desde la cuerda hasta la pasarela. Calcular el área de la mampara.

SOLUCIÓN:

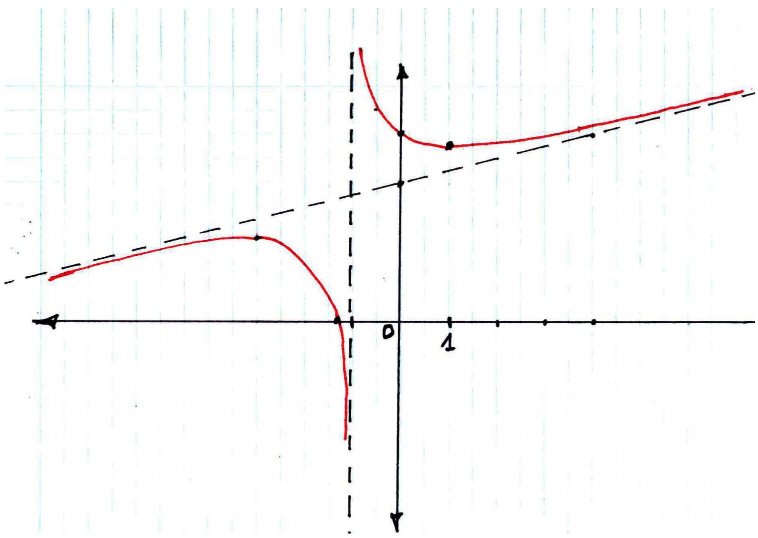
Vamos, en primer lugar, a estudiar la representación gráfica de la función dada.
Dominio: (-∞, -1) U (-1, +∞)
Cortes con los ejes: x = 0; y = 4 . El punto de corte con el eje OY es (0,4).
Si y = 0; x_1 = -11’62 , x_2 = -1’38. Los puntos de corte con el eje OX son (-1’38, 0) y (-11’62, 0)
Monotonía y extremos:
$y' = \frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x)^2}$; resolviendo la ecuación $0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x)^2}$, se obtiene x_1=1; x_2 = -3
Estudiamos el signo de y’ en su dominio:

-∞	-3	-1	1	+∞
y’>0	y’<0		y’<0	y’>0
creciente	decreciente		decreciente	creciente

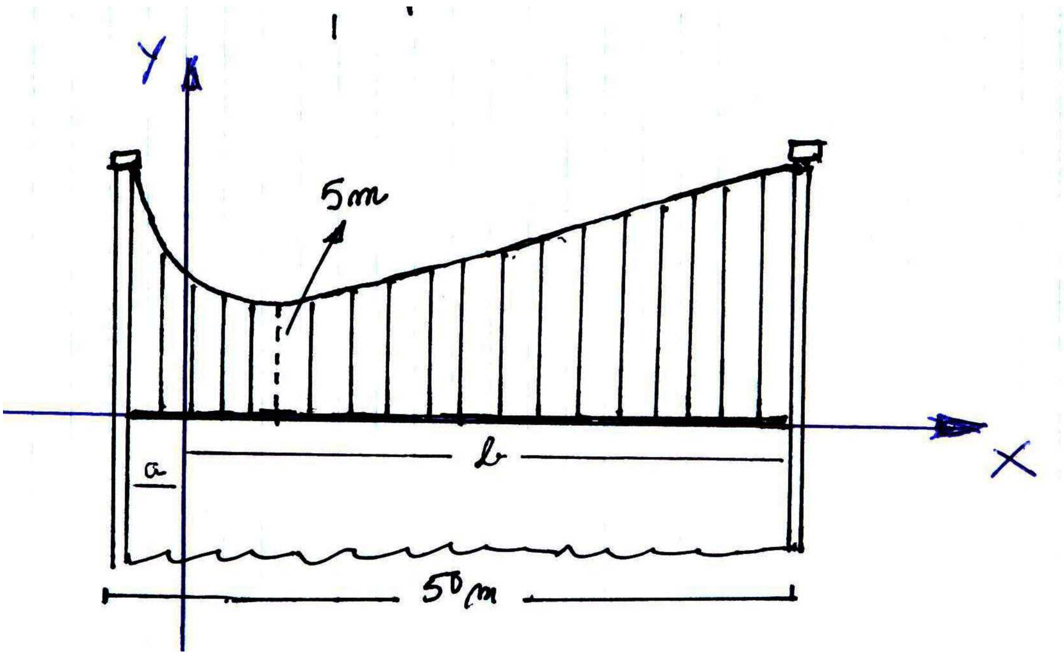
Según la tabla de monotonía presenta un máximo en (-3, 1’75) y un mínimo en (1, 3’75)
Concavidad y convexidad:
$y'' = \frac{2}{(1+x)^3}$; que no tiene solución igualada a 0.
Estudiamos el signo de y’’ en su dominio:

-∞	-1	+∞
y’’<0		y’’>0
cóncava		convexa

Asíntotas:
Tíene una asíntota vertical en x=-1 y una asíntota oblicua en $y = \frac{1}{4}x + 3$.
Su gráfica es:



a) Por tanto el puente tendría esta apariencia:



donde la cuerda colgante coincide con la rama derecha de la gráfica de la función dada. Obsérvese que la altura de la pasarela al rio es un dato irrelevante en el problema.

b)

Vamos ahora a averiguar las distancias de la figura a y b.
Las relaciones que existen entre a y b son:
a + b = 50   y   f(-a) = f(b), siendo f la función que determina la cuerda colgante.
Es decir que hay que resolver el sistema dado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b=50 \\ 3-\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{1-a}=3+\dfrac{b}{4}+\dfrac{1}{1+b} \end{cases}$$

Una vez resuelto por sustitución llegamos a la ecuación de segundo grado:

$b^2 - 48\,b - 53 = 0$, cuyas soluciones son 49,07 y otra negativa que descartamos.
Por tanto hemos concluido que b = 49,07   y   a = 0,93

Así pues, la altura mínima que alcanza la cuerda respecto a la pasarela es **5 m** tal y como nos lo indica el enunciado del problema, mientras que la distancia máxima es f(-a) = f(b), es decir (lo calculo con 0,93)

$f(-0{,}93)=3-\dfrac{0{,}93}{4}+\dfrac{1}{1-0{,}93}=$ **15 metros** desde la pasarela hasta el punto más alto de los pilares.

c)

El área de la mampara para proteger un lado del puente es:

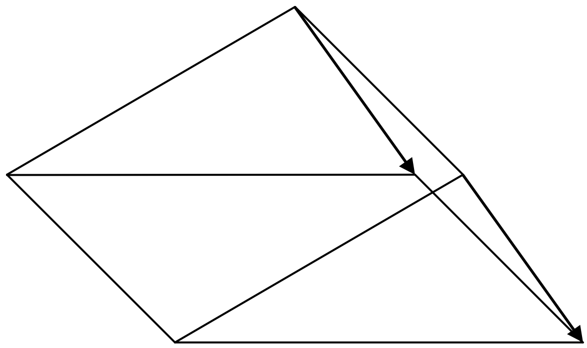
$$\int_{-0'93}^{49,07} (3+\frac{x}{4}+\frac{1}{1+x})dx$$

$$\left[3x+\frac{x^2}{8}+\ln|1+x)|\right]_{-0'93}^{49,07} = \mathbf{457\ '5}\ \text{m}^2$$

2. Se tiene una placa fotoeléctrica de ½ de pendiente con respecto a la horizontal con forma cuadrangular de lado 3m. El día 21 de junio, solsticio de verano, los rayos del Sol inciden sobre el suelo con un ángulo de 60º.

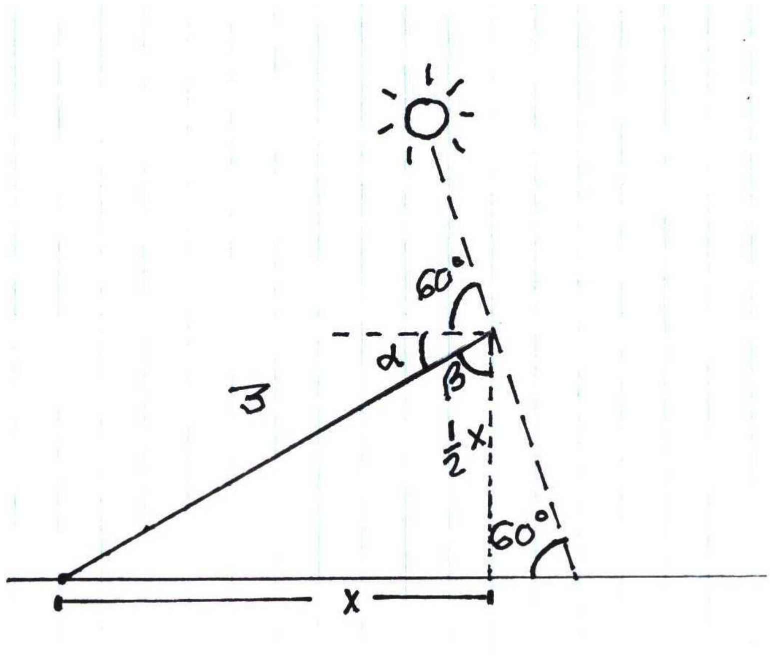
a) Calcular el ángulo de incidencia del rayo de luz sobre la placa

b) Calcular el volumen del prisma que determinan la placa, su sombra y los rayos que la determinan.



SOLUCIÓN:

Si hacemos una sección transversal del prisma del dibujo obtendremos el siguiente esquema:



a) El ángulo de incidencia de los rayos del sol sobre la placa es 60 + α como se puede ver en el dibujo. Ahora bien, α = 90 - β y por otro lado sabemos que tagβ = 2, por lo que β = arctag 2 = 63º 25’.

Por tanto α = 90º - 63º25’ = 26º35’, obteniéndose que el ángulo de incidencia de los rayos del sol sobre la placa es

86º 35’

b) Calcular el volumen del prisma:

Area de la base x altura

Si consideramos la base la sección transversal del dibujo, la altura del prisma es 3. Por lo tanto necesitamos calcular el área de dicha sección que es triangular.
Si llamamos ***y*** a la base del triángulo rectángulo de la derecha del dibujo, sabemos que $tag60 = \frac{\frac{1}{2}x}{y}$, de donde $2y\sqrt{3} = x$

Por otra parte, en el triángulo rectángulo de la izquierda tenemos que por el teorema de Pitágoras:

$9 = \frac{1}{4}x^2 + x^2$, de donde $x^2 = 36/5$, x = 2,68

y = 2’68/3,46 = 0,77

Base = 3,45 altura = 1,34

Area Base = 2,311 m^2

Volumen del prisma = 2,311 . 3 = **7 m^3**