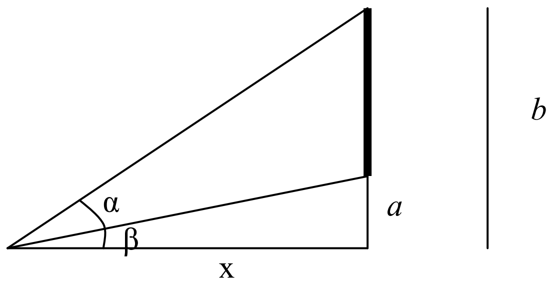
Un observador se encuentra frente a un cuadro colgado de una pared vertical. El borde inferior del cuadro está situado a una distancia a sobre el nivel de los ojos del observador, el borde superior a una distancia b. ¿A qué distancia de la pared debe situarse el observador para que el ángulo bajo el que ve el cuadro sea el máximo?



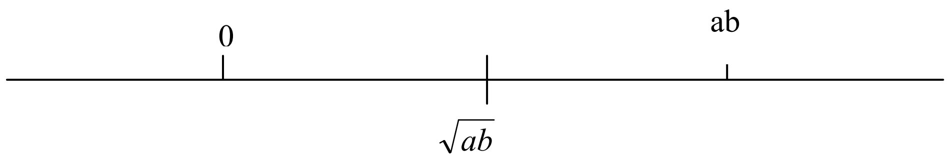
$tag(\alpha+\beta)=\frac{b}{x}$; $\frac{tag\alpha+tag\beta}{1-tag\alpha.tag\beta}=\frac{b}{x}$ puesto que $tag\beta=\frac{a}{x}$, resulta:

$(tag\alpha+\frac{a}{x})x=(1-tag\alpha.\frac{a}{x})b$; $tag\alpha(x+\frac{ab}{x})=b-a$; $tag\alpha=\frac{(b-a)x}{x^2+ab}$

$\alpha=arctag\frac{(b-a)x}{x^2+ab}$; como lo que hay que maximizar es α ya tenemos la función a derivar para calcular el extremo. Derivando se obtiene:

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{\frac{(b-a)(x^2+ab)-2x^2(b-a)}{(x^2+ab)^2}}{1+\left[\frac{(b-a)x}{x^2+ab}\right]^2}=0;\quad \text{de donde}\quad (b-a)(-x^2+ab)=0$$

$x=\pm\sqrt{ab}$ que en nuestro caso solo nos servirá la solución positiva, es decir $\sqrt{ab}$ que lo estudiamos en el dominio de la función que es R.

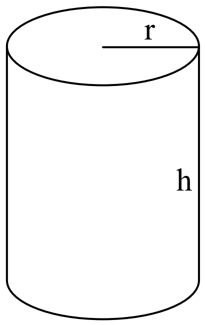


La derivada en 0 es positiva pues viene determinada por el signo de la expresión ab(b-a) que es positiva toda vez que b>a y ambos son positivos.
La derivada en ab es negativa pues viene determinada por el signo de la expresión $ab-(ab)^2 < 0$.

Hay un máximo.[1]

[1] A partir de este momento no volveremos a comprobar si el valor que anula la derivada determina un máximo o un mínimo salvo que haya necesidad de discernir. Damos por hecho la optimización establecida en el enunciado del problema.

Determinar la razón entre el radio de la base y la altura de un cilindro que, con el volumen dado, tenga la superficie total mínima.



$$V = \pi r^2 h \quad ; \quad h = \frac{V}{\pi r^2}$$

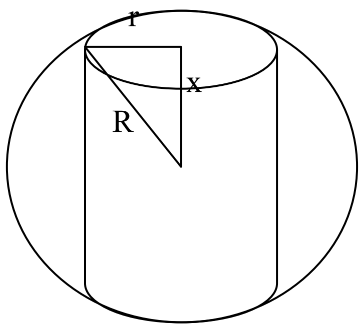
$$S_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

$$S_T = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Si la superficie total ha de ser mínima, la derivada respecto al radio se anula en dicho mínimo, es decir:

$\frac{-2V}{r^2} + 4\pi r = 0$ de donde, $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ y $h = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}}$ por tanto la relación entre el radio y la altura es $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$

Hallar el área total máxima de un cilindro inscrito en una esfera de radio R.



$A = 2\pi r^2 + 4\pi r x$, $R^2 = x^2 + r^2$ $x = \sqrt{R^2 - r^2}$

$A = 2\pi r^2 + 4\pi r \sqrt{R^2 - r^2}$; derivando e igualando a 0, se obtiene la ecuación bicuadrada en r:

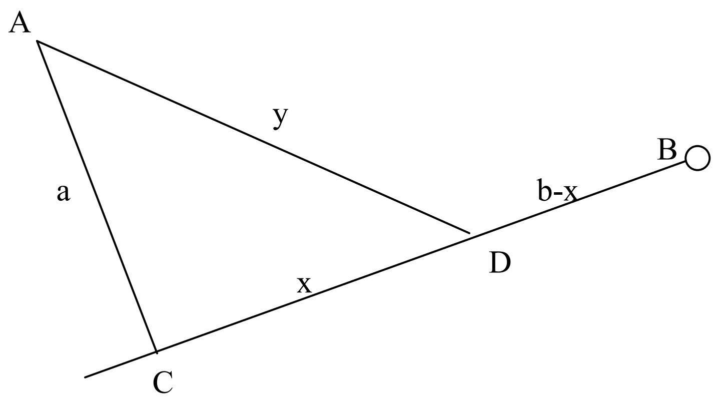
$5r^4 - 5R^2r^2 + R^4 = 0$, de donde

$r^2 = \left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}\right) R^2$ Obtenemos para r dos posibles soluciones $r = R\sqrt{\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right)}$ y

$r = R\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$, cuyos respectivos valores de x son $x = R\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)}$ y $x = R\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)}$

Veamos entonces cuánto vale el área lateral en ambos casos:
En el primer caso el área vale: $\pi R^2(1+\sqrt{5})$
En el segundo caso el área vale: $\pi R^2(1+\frac{3}{5}\sqrt{5})$ que es inferior a la anterior. Por tanto la solución es: $\pi R^2(1+\sqrt{5})$

La fábrica A debe unirse mediante una carretera con una línea férrea rectilínea en la que se encuentra el poblado B. La distancia AC desde la fábrica hasta el ferrocarril es igual a a, en tanto que la distancia BC por el ferrocarril es igual a b. El costo del transporte de las mercancías por la carretera es k veces (k>1) mayor que por el ferrocarril. ¿En que punto D del segmento BC hay que trazar la carretera desde la fábrica para que el costo del transporte de las mercancías desde la fábrica A hasta el poblado B sea el mínimo?



Si supongo que el precio por unidad de distancia por tren es 1, por carretera es k.
Por tanto la función coste es:

k.y + b-x

Ahora bien $y = \sqrt{x^2 + a^2}$, por tanto la función coste es:

$$C(x) = k\sqrt{x^2 + a^2} + b - x$$

$$C'(x) = \frac{kx}{\sqrt{x^2 + a^2}} - 1 \quad ; \quad C'(x) = 0 \text{ implica } x = \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

por tanto el punto D ha de estar del pueblo B a una distancia por la línea del ferrocarril igual a

$$b - \frac{a}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

A 10 Km de tu casa te acuerdas que te has dejado el agua corriendo, lo que te cuesta 10 ptas. la hora. Volver a casa a una velocidad constante de x Km/h te cuesta en combustible 9+(x/10) ptas. el Km.
a) ¿Cuánto te cuesta volver a casa a x km/h (en combustible)?
b) ¿Cuánto tiempo tardas en llegar a casa si viajas a esa velocidad?
c) ¿Cuánto te cuesta el consumo de agua mientras regresas a casa?
d) ¿A qué velocidad debes regresar a casa para que el coste total de consumo de agua y combustible sea mínimo.

SOLUCION:

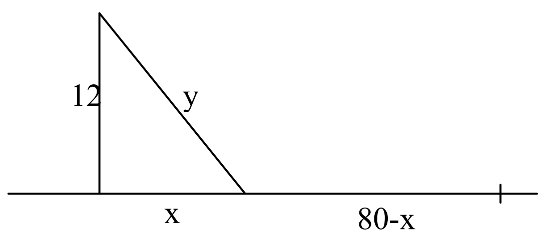
a) 10 [9+(x/10)] = 90 + x pesetas.

b) t = 10/x horas

c) 100/x pesetas

d) 100/x + 90+x ha de ser minimo; derivando $-100/x^2 + 1 = 0$: de donde x= 10 Km/h

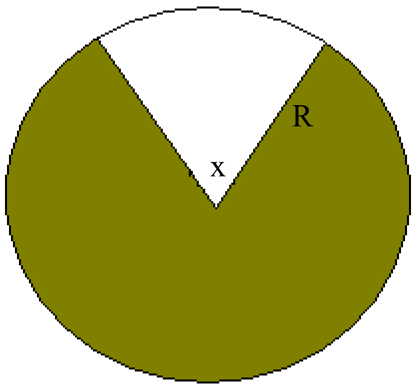
Una fábrica situada a 12 Km. de la orilla de un río rectilíneo, ha de transportar sus producto a una ciudad situada en la orilla del río y a 80 Km del punto de éste más próximo de la fábrica. El transporte de mercancías en camión cuesta 130 ptas por tonelada y km y el transporte en gabarra por el río cuesta 50 ptas. por tonelada y km. ¿En qué punto de la orilla se debería cargar la mercancía en gabarras para que el coste total del transporte sea mínimo?

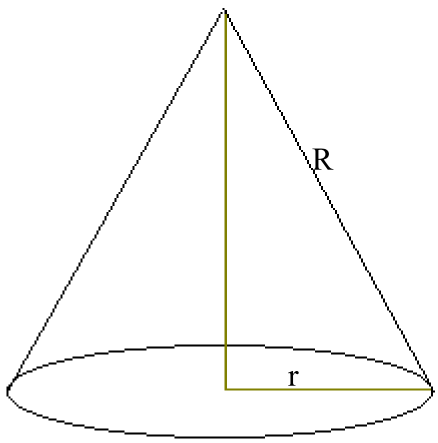


$y = \sqrt{144 + x^2}$ Coste = 130. $\sqrt{144 + x^2}$ + 50 (80-x) ; derivando se obtiene

$$\frac{130x}{\sqrt{144 + x^2}} - 50 = 0; \quad x = 5\ Km.$$

De una chapa redonda de hojalata se corta un sector circular que se enrolla en forma de un embudo cónico. ¿Cuál debe ser el ángulo del sector para que el embudo tenga el volumen máximo?





El perímetro de la base del cono es 2πR-Rx = R(2π-x) y dado que a su vez es 2πr, resulta que:

$$r = \frac{R(2\pi - x)}{2\pi}$$

la altura del cono es $\sqrt{R^2 - r^2}$

Así pues el volumen es V = $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{R(2\pi - x)}{2\pi}\right)^2 . \sqrt{R^2 - r^2}$, sustituyendo r por su valor en función de x, derivando respecto a x e igualando a 0 se obtiene que

$$x = 2\pi\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$$

por tanto el ángulo que determina el vaso cónico es $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

Un granjero compra una ternera de 270 Kg por 18000 ptas. Alimentar al animal cuesta 15 ptas al día y la ternera aumenta de peso 0,45 Kg cada día. Por otro lado, cada día que pasa, el valor del animal en el mercado disminuye, de modo que el valor al cabo de t días, dependiendo del peso del animal es (100-(t/18)) ptas por Kilo. Calcular:

a) Peso de la ternera al cabo de t días
b) Valor total de la ternera en el mercado al cabo de t días.
c) Coste total invertido en esos t días, incluyendo la compra y la alimentación.
d) Ganancia obtenida por el granjero si vende la ternera a los t días (la ganancia será el valor de la ternera en ese instante menos los costes invertidos)
e) ¿Cuándo deben vender la ternera para obtener la máxima ganancia?

a) 270 + 0,45t

b) (100-(t/18))(270 + 0,45t)

c) 18000 + 15 t

d) (100-(t/18))(270 + 0,45t) - (18000 + 15 t)

e) Derivando la expresión d) e igualando a 0, resulta t = $10\sqrt{3}$ días.

Entre todos los rectángulos que tienen el área dada S, hallen aquel que: 1) tenga el menor perímetro; 2) tenga la menor diagonal:

1) Sean x e y la altura y base respectivamente del rectángulo. x.y = S; de donde y = S/x

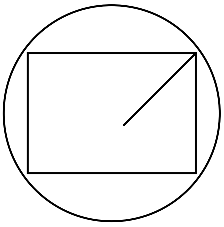
El perímetro P = 2 (x+y) = $\frac{2(x^2+S)}{x}$, cuya derivada es: $\frac{2x^2-2S}{x^2}$, e igualando a 0, resulta la única solución posible $x=\sqrt{S}$ y por tanto $y=\sqrt{S}$

La solución es un cuadrado de lado $\sqrt{S}$

2) La menor diagonal:

$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{x^4+S^2}{x^2}}$ derivando e igualando a 0, resulta: $x=\sqrt{S}$ y por tanto $y=\sqrt{S}$

Hallar la mayor área del rectángulo inscrito en un círculo de radio R



Sean 2x y 2y la base y altura respectivamente del rectángulo. Obtenemos la relación:

$R^2 = x^2 + y^2$, de donde $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. El Area es entonces $A = \sqrt{R^2x^2 - x^4}$
Derivando e igualando a 0 se obtiene:

$2R^2x - 4x^3 = 0$, por tanto x = $\frac{R}{\sqrt{2}}$, y = $\frac{R}{\sqrt{2}}$

Hallar en la hipérbola $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ el punto más próximo al punto (3, 0)

Sea (x, y) el punto buscado. Hay que hacer la distancia a (3, 0) mínima, es decir

$d = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$; sabemos que $y^2 = \frac{x^2}{2} - 1$, con lo que

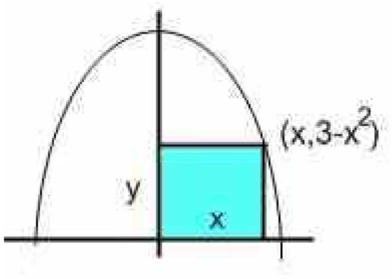
$d = \sqrt{\frac{3x^2 - 12x + 16}{2}}$, derivando d e igualando a 0, resulta 6x - 12 = 0, de donde x=2, y por tanto y = ±1. Los puntos buscados son (2,1) y (2,-1)

Hallar en la parábola $y = x^2$ el punto más próximo al punto (2, 1/2)

Igual que en ejercicio anterior $d = \sqrt{(x-2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2}$, derivando e igualando a 0, resulta la ecuación $2(x-2) + (2x^2 - 1).2x = 0$; $4x^3 - 4 = 0$, de donde x = 1, y = 1
Solución: (1,1)

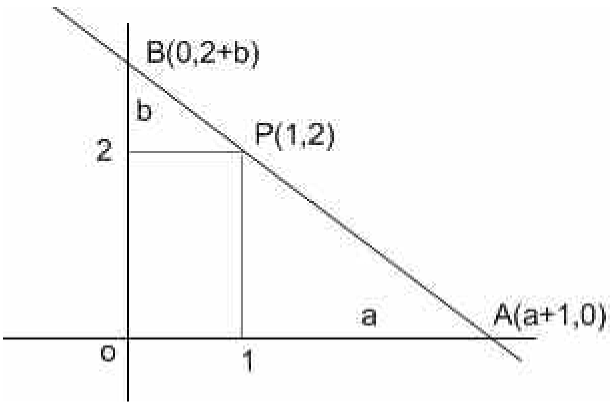
Hallar el área máxima de un rectángulo cuyos dos vértices yacen en los ejes X e Y de un sistema cartesiano de coordenadas, el tercero en el punto (0,0) y el cuarto está en la parábola $y = 3 - x^2$

El area es $x(3-x^2)$, cuya derivada es $3-3x^2$, igualando a 0, $x=\pm 1$. Solo nos vale la solución positiva. El área máxima es 2.

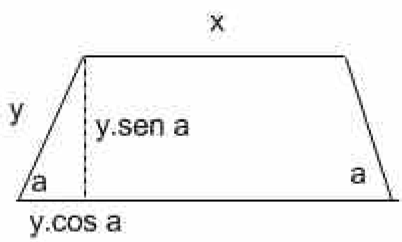


Hallar la pendiente de la recta que pasa por el punto A(1,2) y que corta al primer cuadrante de coordenadas en el triángula de área mínima.

El área del triángulo es $A = \dfrac{(a+1)(2+b)}{2}$, ahora bien, los triángulos B2P y P1A son semejantes, por tanto b/1 = 2/a. Sustituyendo a por 2/b en la ecuación del área, resulta que $A = \dfrac{4+b^2+4b}{2}$, derivando e igualando a 0, resulta $2b^2 - 8 = 0$, por lo que b=2 y a =1, en consecuencia la pendiente de la recta y = mx + n que pasa por (1,2) y por (2,0) es -2. puesto que es el valor de m al resolver el sistema 2=m+n y 0=2m+n



Hallar la longitud del lado del trapecio que tenga el perímetro mínimo entre todos los trapecios isósceles con área prefijada S y ángulo α entre el lado y la base inferior.



En el desarrollo del problema sustituiremos el ángulo a por α

La base menor es x. La base mayor es x + 2y.cos α y la altura es y.sen α

Perímetro = 2(x + y + y.cos α)
El área de un trapecio es la semisuma de las bases por la altura:

S = $\dfrac{(x+x+2y.\cos\alpha)}{2}.ysen\alpha = xysen\alpha + y.\cos\alpha.sen\alpha$, de donde

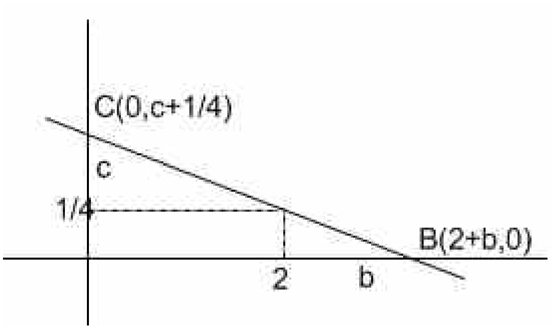
$x = \dfrac{S - y\cos\alpha.sen\alpha}{ysen\alpha}$, sustituyendo x en la fórmula del perímetro se obtiene:

$$P = (\frac{S - y\cos\alpha.sen\alpha}{ysen\alpha} + y + y.\cos\alpha) = \frac{S + y^2 sen\alpha}{ysen\alpha} = \frac{S}{ysen\alpha} + y$$

Derivando P, se obtiene

$\dfrac{-S}{y^2 sen\alpha} + 1 = 0$, de donde $y = \sqrt{\dfrac{S}{sen\alpha}}$

Por el punto (2, 1/4) se trazan rectas que cortan los semiejes positivos en los puntos B y C. Hallar la ecuación de aquella recta para la que el segmento BC tiene la longitud mínima.



La distancia entre B y C viene dada por $d = \sqrt{(2+b)^2 + (c + 1/4)^2}$

Observemos que por semejanza de triángulos c/2 = 1/4b, de donde c = 1/2b

Sustituyendo en la expresión de la distancia tenemos:

$d = \sqrt{(2+b)^2 + (1/2b + 1/4)^2}$, si derivamos e igualamos a 0 llegamos a la expresión:

$2(2+b) + 2(1/2b + 1/4)(-\dfrac{1}{4b^2}) = 0$, simplificando se obtiene la ecuación

$8b^4 + 16b^3 - b - 2 = 0$ que por Ruffini se descompone en $(b+2)(8b^3 - 1) = 0$.

La solución b=-2 no es válida por tanto la solución es b= 1/2

c = 1.

La ecuación de la recta pedida es $\dfrac{x}{5/2} + \dfrac{y}{5/4} = 1$ o 2x + 4y = 5

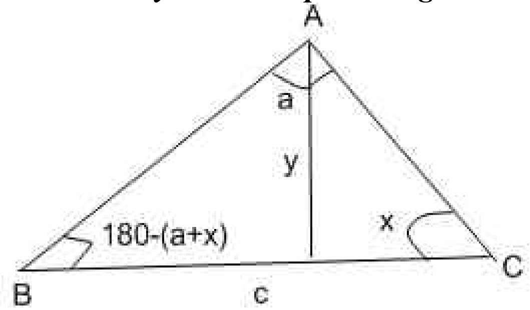
Hallar los ángulos agudos del triángulo rectángulo que tiene el área máxima entre todos los triángulos en los que la suma de las longitudes de uno de los catetos y la hipotenusa es constante.

Sea x un cateto (base del triángulo) e y la hipotenusa. El otro cateto, por el teorema de Pitágoras es $\sqrt{y^2 - x^2}$. El area es $A = \dfrac{x\sqrt{y^2 - x^2}}{2}$. Como x + y = k, y = k-x, de donde

$A = \frac{x\sqrt{(k-x)^2 - x^2}}{2} = \frac{\sqrt{k^2x^2 - 2kx^3}}{2}$; Derivando e igualando a 0, se obtiene:

$2k^2x - 6kx^2 = 0;\quad 2kx(k-3x) = 0;\quad x = \frac{k}{3}$ e $y = \frac{2k}{3}$, cos α = x/y = 1/2 . Por tanto α = 60º y β=30º.

Determinar los ángángulos del triángulo ABC de área máxima, si se da la longitud de su base BC y sabemos que el ángulo BAC vale a



En la resolución del problema sustituiremos el valor a del ángulo por α y los 180º los expresamos en radianes por π
Si descomponemos el triángulo en los dos triángulos rectángulos de la figura, obtenemos que los catetos que conforman sus bases se obtienen del cálculo de las tangentes de x y de la tangente de π-(α+x).
Se obtiene entonces:

$c = \frac{y}{tagx} + \frac{y}{tag(\pi - (\alpha + x))}$, ahora bien tag (π-(α+x)) = - tag (α+x), así pues:

$c = \frac{y}{tagx} - \frac{y}{tag(\alpha + x)}$; de donde $y = \frac{c}{\frac{1}{tagx} - \frac{1}{tag(\alpha + x)}}$

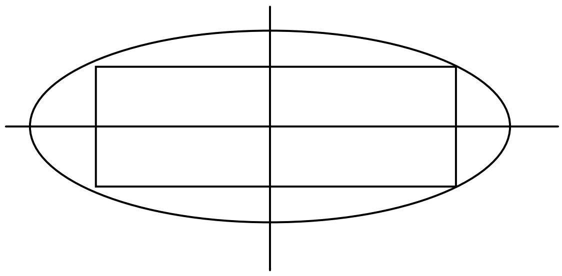
La función a maximizar, el área del triángulo, es:

$A = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{tagx} - \frac{1}{tag(\alpha + x)}}$, si derivamos respecto de x e igualamos a 0, llegamos a la ecuación:

$$tagx = \pm tag(\alpha + x)$$

Dos casos: Si $tagx = tag(\alpha + x)$, entonces α +x = π + x. Solución no válida pues α = π
Si $tagx = -tag(\alpha + x)$, entonces tenemos que α +x = π - x, de donde el ángulo buscado x es $\frac{\pi - \alpha}{2}$ y por tanto el tercero es $\frac{\pi - \alpha}{2}$

Determinar los lados del rectángulo de área máxima inscrita en la elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ***de forma que los lados del rectángulo sean paralelos a los ejes de la elipse.***



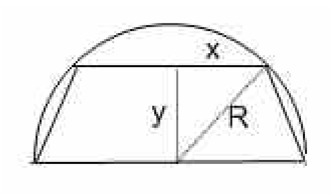
Sea x, la mitad de la base e y la mitad de la altura.
Despejando y de la ecuación de la elipse se tiene:

$y=\sqrt{\frac{a^2b^2-a^2x^2}{a^2}}$. El área del rectángulo es 2x.2y = 4xy, es decir

$4\sqrt{\frac{a^2b^2x^2-a^2x^4}{a^2}}$, derivando respecto a x e igualando a 0, se obtiene la ecuación:

$2a^2b^2x - 4a^2x^3 = 0$, de donde x=0 (No vale) y $x=\sqrt{\frac{2a^2b^2}{4a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$, de donde la base del rectángulo es $\sqrt{2}b$ y la altura es $\sqrt{2}a$

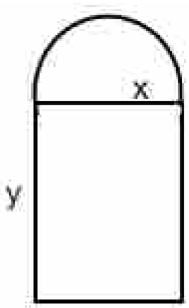
Calcular el área máxima del trapecio inscrito en un semicírculo de radio R, de forma que la base inferior del trapecio sea el diámetro del semicírculo.



$y=\sqrt{R^2-x^2}$ A $=\frac{(2x+2R)}{2}y=\sqrt{(x+R)^2(R^2-x^2)}$, derivando respecto de x e igualando a 0, llegamos a que x=R/2. e y=$\sqrt{\frac{3}{2}}R$

Por tanto el área pedida es: $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$

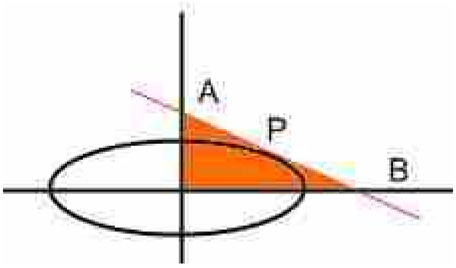
La sección de un túnel tiene la forma de un rectángulo que termina en un semicírculo. Determinar el radio del semicírculo con el que el área de la sección será la máxima si el perímetro de la sección es igual a p.



Si llamamos x al radio del semicírculo e y a la altura del rectángulo, el perímetro p = 2y + 2x + πx,
El área de la sección es $A = 2xy + \pi x^2/2$
De la primera ecuación tenemos que y = (p-2x- πx)/2
Por lo que el área queda en función de x del siguiente modo:

$A = px-2x^2-\pi x^2/2$; derivando respecto de x e igualando a 0 se obtiene: p - 4x - πx = 0, de donde x = p/(π+4)

¿Por qué punto de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ***se debe trazar una tangente de forma que sea la mínima el área del triángulo formado por esta tangente y los semiejes positivos Ox y Oy?***



Sea la recta tangente y=mx + n
Por tanto A (0,n) y B (-n/m, 0)
El área del triángulo es $-n^2/2m$

Para obtener la relación existente entre m y n partimos del hecho de que la recta es tangente, es decir que solamente tiene un único punto de corte con la elipse, por lo que al resolver el sistema de ambas ecuaciones obtenemos una ecuación de segundo grado en x cuyo discriminante tiene que ser 0, de donde se obtiene que $n=\sqrt{a^2m^2+b^2}$; sustituyendo en la expresión del área, resulta:

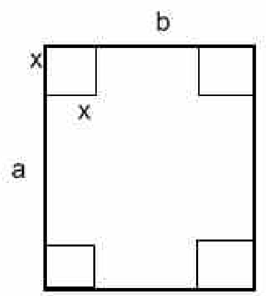
$A=\frac{-a^2m^2-b^2}{2m}$, derivando respecto de m e igualando a 0 tenemos que:

$m=\frac{-b}{a}; \quad n=\sqrt{2}b$. De este modo he obtenido la recta tangente que va a hacer mínima el área del triángulo que es $y=\frac{-b}{a}x+\sqrt{2}b$

Como me piden el punto P, hemos de resolver el sistema formado por las ecuaciones de la elipse y de la recta, obteniendo de dicho sistema que

$x=\frac{a}{\sqrt{2}}; \quad y=\frac{b}{\sqrt{2}}$ que son las coordenadas respectivamente del punto P.

Una hoja de cartón tiene la forma de un rectángulo con lados a y b. Cortando por sus ángulos cuadrados y doblando las partes sobresalientes de la figura cruciforme, obtenemos una caja abierta por arriba, cuya altura es igual al lado del cuadrado. ¿Cuál debe ser el lado del cuadrado para que el volumen de la caja sea el máximo?



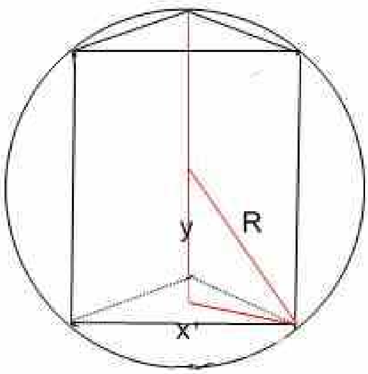
Volumen de la caja es V = (a-2x).(b-2x).x

Derivando respecto de x, otenemos
-2(b-2x)x-2(a-2x).x + (a-2x)(b-2x) = 0
$12x^2$ -(4a+4b)x + ab = 0

x = $\dfrac{a+b-(\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$

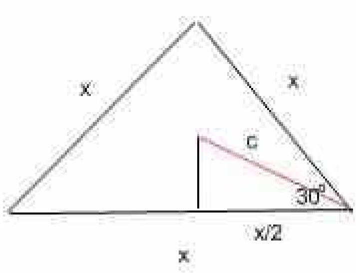
Hallar la altura de un prisma regular triangular de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

En primer lugar un prisma regular triangular es aquel cuyas bases son sendos triángulos equiláteros y las aristas que determinan la altura son perpendiculares a las bases. Sea x el lado del triángulo. Sea y la mitad de la altura. Obtenemos la siguiente figura:



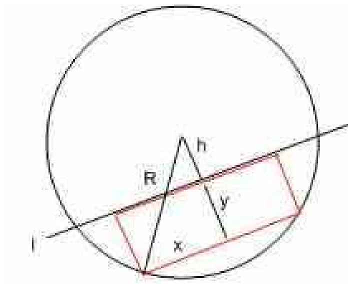
Vamos a averiguar el cateto del triángulo rectángulo (rojo) cuyo otro cateto e hipotenusa respectivamente son y , R.

Veamos el triángulo que conforma la base:



Como el triángulo es equilátero, la situación es la de la figura. Por tanto $\cos 30º = \dfrac{x/2}{c}$, de donde c = $\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$
Por tanto la relación entre las dos variables x e y, yendo a la primera figura (triángulo rectángulo rojo) es $y^2 + c^2 = R^2$, o lo que es lo mismo $y^2 + \dfrac{1}{3}x^2 = R^2$
Como el volumen del prisma es Area de la base por la altura. Tenemos:
$V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2.y$. Sustituyendo x^2 por su valor obtenido en la relación anterior, resulta que
$V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(3R^2y - 3y^3)$, derivando e igualando a 0 $3R^2 - 9y^2 = 0$, de donde:
$y = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$, por tanto la altura del prisma que hace el volumen máximo es $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

Un círculo de radio R está dividido en dos segmentos con la recta l alejada del centro del círculo a una distancia h. Entre todos los rectángulos inscritos en el menor de dichos segmentos, hallar el de área máxima.



El área del rectángulo es 2x.y

La relación entre x e y es: $R^2 = x^2 + (h+y)^2$

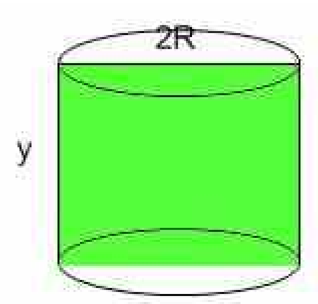
Despejando $x = \sqrt{R^2 - (h+y)^2}$

El área es entonces $2\sqrt{R^2 y^2 - (h+y)^2 y^2}$

derivando e igualando a 0, se obtiene la ecuación de segundo grado siguiente:

$4y^2 + 6hy + 2(h^2-R^2) = 0$, cuya solución es $y = \dfrac{-3h + \sqrt{h^2 + 8R^2}}{4}$ que es la altura del rectángulo inscrito de área máxima, y por tanto la distancia del centro al lado del rectángulo paralelo a la recta l es $y + h = \dfrac{h + \sqrt{h^2 + 8R^2}}{4}$

Hallar el volumen máximo de un cilindro cuyo perímetro en su sección axial es a.



La sección axial es el rectángulo coloreado, cuyo perímetro es 4R + 2y = a, de donde y = (a-4R)/2.

El volumen del círculo es:

$V = \pi R^2.y$; es decir $V = (a\pi R^2 - 4\pi R^3)/2$, derivando e igualando a 0 se obtiene:

$2a\pi R - 12\pi R^2 = 0$; R = 0 (No vale) y R = a/6. por tanto y =a/6

Así pues, el volumen pedido es $\pi a^3/ 216$

Calcular el volumen de un cilindro cuya área total es S.

Sirviéndonos de la figura anterior, sea R el radio de la base e y la altura.

$S = 2\pi R^2 + 2\pi Ry$. Por tanto $y = (S-2\pi R^2)/ 2\pi R$

El volumen es $V = \pi R^2.y = (SR-2\pi R^3)/2$, derivando e igualando a 0: $S - 6\pi R^2 = 0$

de donde $R^2 = S/6\pi$. $y = \dfrac{2\sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}}$. El volumen pedido es $V = \dfrac{S\sqrt{S}}{3\sqrt{6\pi}}$

Una lata de conservas tiene forma cilíndrica. Hallar las dimensiones más ventajosas de la lata, es decir determinar la relación entre el diametro de la base y la altura del cilindro con la que tenga el volumen máximo con la superficie total prefijada.

Sirviéndonos de la figura anterior, sea R el radio de la base e y la altura.

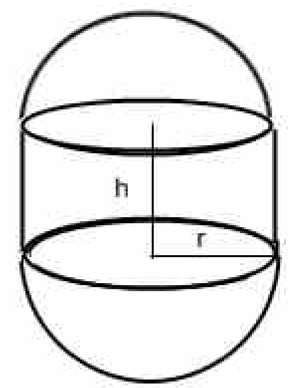
$S = 2\pi R^2 + 2\pi Ry$. Por tanto $y = (S-2\pi R^2)/ 2\pi R$

El volumen es $V = \pi R^2.y = (SR-2\pi R^3)/2$, derivando e igualando a 0: $S - 6\pi R^2 = 0$

de donde $R^2 = S/6\pi$. $y = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{6\pi}}$. la relación pedida es $2R/y = \frac{2\sqrt{S}/\sqrt{6\pi}}{2\sqrt{S}/\sqrt{6\pi}} = 1$

Resulta que diámetro de la base y altura han de tener el mismo valor.

¿Cómo debe ser una caldera constituida por un cilindro rematado en dos semiesferas, con las paredes del grosor prefijado, para que la capacidad prefijada v para su construcción se emplee la cantidad mínima de material?



Buscaremos sus dimensiones r y h.
El volumen prefijado es:

$v = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$; de donde $h = \frac{-\frac{4}{3}\pi r^3 + \upsilon}{\pi r^2} = -\frac{4}{3}r + \frac{\upsilon}{\pi r^2}$

Y hay que minimizar la superficie total que es:

$S = 4\pi r^2 + 2\pi rh$, sustituyendo h por la expresión anterior

$S = \frac{8}{3}\pi r - \frac{2\upsilon}{r}$ derivando respecto de r e igualando a 0, obtenemos que $r = \sqrt[3]{\frac{3\upsilon}{4\pi}}$ y h = 0. Con lo que la caldera tiene que ser una esfera de radio $\sqrt[3]{\frac{3\upsilon}{4\pi}}$

Determinar la razón entre el radio de la base y la altura de un cilindro que, con el volumen dado, tenga la superficie total mínima.

$V = \pi r^2 h$, de donde $h = V/\pi r^2$.
$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, sustituyendo h en la última expresión resulta que $S = 2(\pi r^2 + V/r)$, derivando respecto a r e igualando a 0, resulta que $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, siendo $h = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{(\frac{V}{2\pi})^2}}$

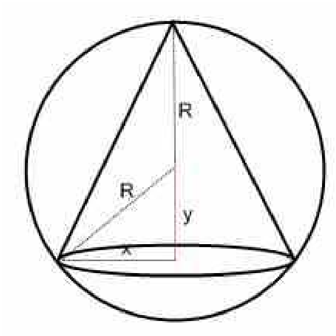
Si pasamos todo a potencias fraccionarias resulta:

$$\frac{r}{h} = \frac{\dfrac{V^{\frac{1}{3}}}{(2\pi)^{\frac{1}{3}}}}{\dfrac{V^{\frac{1}{3}}(2\pi)^{\frac{2}{3}}}{\pi}} = \frac{V^{\frac{1}{3}}\pi}{V^{\frac{1}{3}}(2\pi)} = \frac{1}{2}$$

PROBLEMAS CON CONOS:

Recordemos:
$V = \pi r^2 h/3$ Area lateral = πrg (g es la generatriz, r el radio de la base y h es la altura)

Hallar la altura del cono de volumen máximo, inscrito en una esfera de radio R.



$V = \pi x^2(y+R)/3$

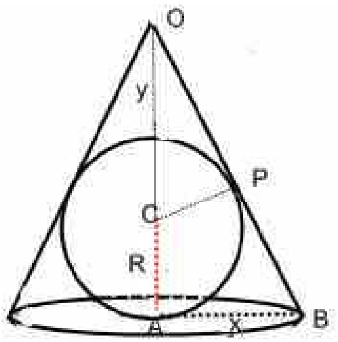
$x^2 = R^2 - y^2$

$V = \dfrac{\pi(R^2 - y^2)(y+R)}{3}$ derivando respecto de y e igualando a 0, obtenemos la ecuación:

$-2y(y+R) + R^2 - y^2 = 0$; $-3y^2 - 2Ry + R^2 = 0$

de donde $y = R/3$, por tanto la altura pedida es $R + R/3 = 4R/3$

Hallar la altura del cono de volumen mínimo circunscrito en una esfera de radio R.



Los triángulos OPC y OAB son semejantes pues tienen un ángulo común O y un ángulo recto en P y A respectivamente.
Por tanto tenemos la siguiente relación de semejanza:

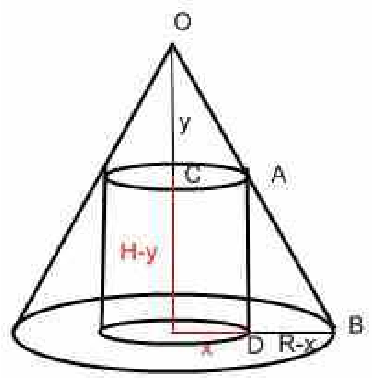
$\dfrac{y+R}{R} = \dfrac{\sqrt{x^2 + (y+2R)^2}}{x}$, elevando al cuadrado:

$\dfrac{(y+R)^2}{R^2} = \dfrac{x^2 + (y+2R)^2}{x^2}$; $\dfrac{(y+R)^2}{R^2} - 1 = \dfrac{(y+2R)^2}{x^2}$;

$x^2 = \dfrac{R^2(y+2R)}{y}$. El volumen del cono es $V = \dfrac{1}{3}\pi x^2(y+2R)$ por tanto

$V = \dfrac{\pi R^2 (y+2R)^2}{3y}$, derivando respecto de y e igualando a 0, obtenemos y = 2R. Por tanto la altura del cono pedida es 4R.

En un cono, en el que el radio de la base es igual a R y la altura H, está inscrito el cilindro de volumen máximo. Hallar el radio de la base y la altura de dicho cilindro.



Los triángulos OCA y ADB son obviamente semejantes de donde se obtiene la relación de semejanza siguiente:

$\frac{y}{x} = \frac{H-y}{R-x}$, despejando y resulta: $y = \frac{xH}{R}$;

$H\text{-}y = \frac{H(R-x)}{R}$ El volumen del cilindro es:

$V = \pi x^2(H\text{-}y) = \frac{\pi x^2 H(R-x)}{R}$, derivando respecto de x e igualando a 0, resulta que x = 2R/3 y la altura del cilindro, es decir H-y es H/3

Hallar el área lateral mínima de un cono de volumen V

Sea g la generatriz del cono, h la altura y r el radio de la base.
Sabemos que $V = \pi r^2 h / 3$ y el área lateral es π r g. Ahora bien, $g = \sqrt{r^2 + h^2}$

Por lo que el área lateral se transforma en $\pi.r.\sqrt{r^2+h^2} = \pi.\sqrt{r^4+h^2r^2}$
Dado que $h = 3V/\pi r^2$, el área lateral en función del Volumen dado y de la variable r:

$A_L = \pi\sqrt{r^4 + \frac{9V^2}{\pi^2.r^2}} =$, derivando con respecto a r e igualando a 0 obtenemos:

$r = \sqrt[6]{\frac{9V^2}{2\pi^2}}$, por tanto el área lateral mínima es $\pi\sqrt{\sqrt[6]{\frac{9^4V^8}{2^4\pi^6}} + \frac{9V^2}{\pi\sqrt[6]{81V^4 / 4\pi^4}}}$,

simplificando esa expresión, el resultado es:

$$3^{\frac{7}{6}}\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{2}}$$

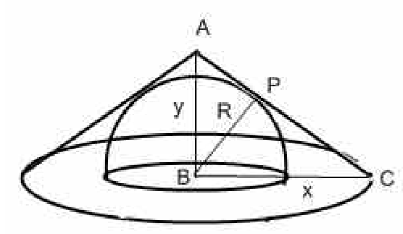
Hallar el volumen máximo de un cono con la generatriz l dada.

$V = \pi r^2 h / 3$ y $l = \sqrt{r^2+h^2}$ $l^2 = r^2 + h^2$

$V = \pi (l^2 - h^2).h / 3$; derivando respecto de h e igualando a 0, $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$ y $r^2 = \frac{2l^2}{3}$

Así pues el volumen pedido es $\frac{2\pi\sqrt{3}l^3}{27}$

Hallar el volumen mínimo de un cono circunscrito una semiesfera de radio R (se supone que las bases de la semiesfera y del cono están en un mismo plano y son concéntricas).



Los triángulos rectángulos APB y ABC son semejantes pues tienen los tres ángulos iguales. Obteniendo la siguiente relación de semejanza:

$$\frac{y}{R} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

Despejando y de esa relación se obtiene que $y = \dfrac{Rx}{\sqrt{x^2 - R^2}}$

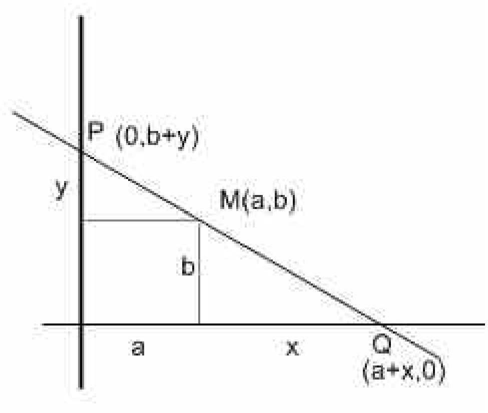
El volumen del cono es $V = \dfrac{\pi x^2 y}{3} = \dfrac{R\pi x^3}{3\sqrt{x^2 - R^2}}$ cuya derivada es:

$$\frac{3R\pi x^2 .3\sqrt{x^2 - R^2} - \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 - R^2}} .R\pi x^3}{9(x^2 - R^2)} = 0 , \quad 9R\pi x^2(x^2 - R^2) - 3\pi Rx^4 = 0;$$

$6\pi Rx^4 - 9\pi R^3 x^2 = 0$; $3R\pi x^2 (2x^2-3R^2) = 0$. de donde $x = R\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ y por tanto

$y = R\sqrt{3}$. Por tanto el volumen es $\dfrac{\sqrt{3}.\pi - R^3}{2}$

Consideremos un haz de rectas que pasan por el punto M(a,b), donde a>0 y b>0, y que cortan los semiejes positivos OX y OY. Hallen la longitud mínima del segmento PQ, donde P y Q son los puntos de intersección de una recta del haz con los semiejes positivos.



La función que hay que minimizar es la distancia entre P y Q que es:

$$\sqrt{(a + x)^2 + (b + y)^2}$$

La relación entre x e y viene dada por la semejanza de los triángulos rectángulos de hipotenusas PM y MQ, es decir:

$\dfrac{y}{a} = \dfrac{b}{x}$, de donde $y = \dfrac{ab}{x}$

La función distancia es:

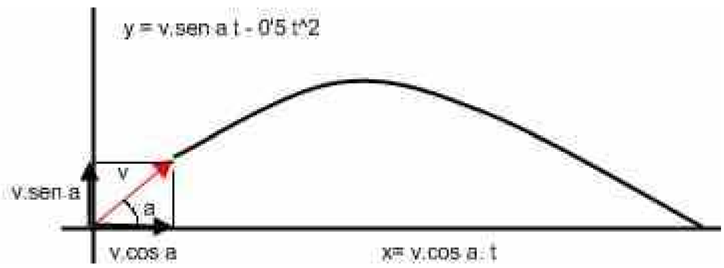
$\sqrt{(a + x)^2 + (b + \dfrac{ab}{x})^2}$, derivando e igualando a 0 tenemos:

$2(a+x)+2(b+\frac{ab}{x})(\frac{-ab}{x^2})=0$, se sigue: $(x+a)(x^3 - ab^2) = 0$.

$x=\sqrt[3]{ab^2}$ $\qquad y=\frac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}}$. La distancia pedida es:

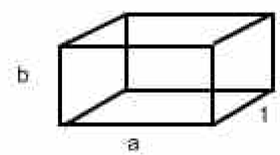
$$\sqrt{(a+(\sqrt[3]{ab^2})^2+(\frac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}}+b)^2}$$

Una piedra ha sido lanzada a velocidad inicial prefijada v bajo el ángulo a respecto al horizonte. Despreciando la resistencia del aire, determinar con qué ángulo a, la distancia de vuelo de la piedra será la máxima.



La distancia máxima se alcanza en el valor de x = v cos a. t , cuando y = 0
es decir v.sen a. t - 0'5 t^2 = 0. de donde t = 0 (la piedra no ha recorrido ningún espacio) y t = 2vsen a.
Por tanto ha de ser máxima la función v cos a. 2v. sen a = v^2 sen 2a.
Derivando respecto de a e igualando a 0, tenemos:
$2v^2\cos 2a = 0$, de donde cos 2a = 0 ; 2a = $\pi/2$; a = $\pi/4$

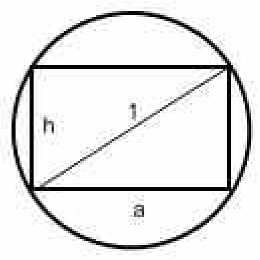
Con el fin de reducir el rozamiento del liquido por las paredes de un canal, el área que el agua humedece debe ser la menor posible. Demostrar que la mejor forma de un canal abierto rectangular con el area de la sección transversal prefijada, es tal que, con ella, la anchura del canal es dos veces mayor que su altura.



Sea A el area de la sección transversal, esto es ab = A
de donde a = A/b

La superficie de rozamiento del agua es:
S = a + 2b (ya que hemos tomado como longitud del canal 1)
Sustituyendo a, resulta que S = $(A + 2b^2)/b$, derivando respecto de b e igualando a 0, resulta $4b^2 - A - 2b^2 = 0$, de donde $b=\sqrt{\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{2A}}{2}$ y $a=\frac{2A}{\sqrt{2A}}=\sqrt{2A}$, quedando demostrado que la anchura (a) es doble que la altura (b).

De un tronco redondo se corta una viga de sección transversal rectangular. Considerando que la resistencia de la viga es proporcional a ah^2, donde a es la base y h la altura del rectángulo, hallar la razón h/a con la que la viga tendrá resistencia máxima.



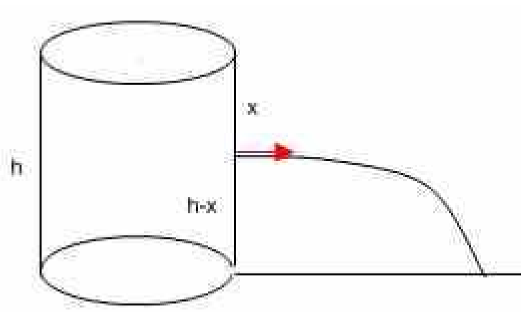
Consideramos el diámetro del tronco igual a 1 (La relación será la misma independientemente del diámetro del tronco)

$1 = h^2 + a^2$, $h^2 = 1 - a^2$

$R = k.a.h^2$, siendo k la constante de proporcionalidad.

$R = k(a - a^3)$, derivando respecto de a e igualando a 0, tenemos $1- 3a^2 = 0$, de donde $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $h = \frac{\sqrt{6}}{3}$, de donde $\frac{h}{a} = \sqrt{2}$

Un recipiente con pared vertical de altura h se encuentra sobre un plano horizontal. De un orificio en la pared del recipiente fluye un chorro. Determinar la posición del orificio con la que el alcance del chorro será el máximo si la velocidad del líquido que fluye es igual a $\sqrt{2gx}$, donde x es la profundidad del orificio (Ley de Torricelli)



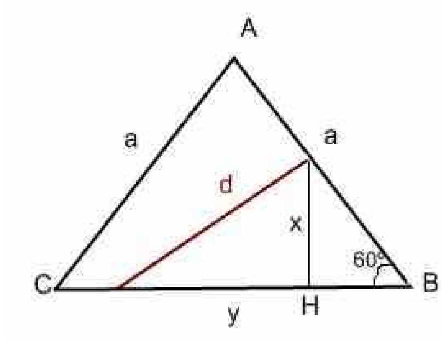
El espacio recorrido en sentido horizontal es $\sqrt{2gx}t$

Mientras que en sentido vertical es una caída libre, es decir $\frac{1}{2}gt^2$

El chorro llega al suelo cuando en vertical ha recorrido h-x, es decir:

$h - x = \frac{1}{2}gt^2$, de donde $t = \sqrt{\frac{2(x-h)}{g}}$, en consecuencia el espacio recorrido en sentido horizontal total es $\sqrt{2gx.\frac{2(x-h)}{g}} = 2\sqrt{x^2 - xh}$, derivando respecto de x e igualando a 0 llegamos a la ecuación 2x - h = 0, de donde x = h/2, es decir que el agujero debe encontrarse en medio del recipiente.

Hallar la longitud mínima del segmento que divide al triángulo equilátero de lado a en dos figuras de áreas iguales



El área del triángulo equilátero de lado a es $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, puesto que la base es a y la altura $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Por tanto, si el segmento d divide al triángulo en dos figuras de igual área, el área del triángulo que queda determinado en la parte inferior es $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

Teniendo en cuenta que HB = x/tag 60 = $\frac{x}{\sqrt{3}}$, tenemos:

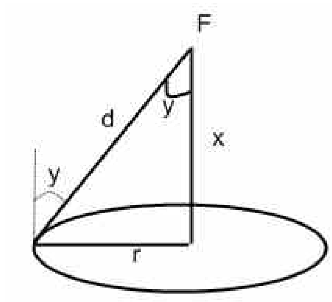
$\frac{\sqrt{3}}{8}a^2 = \frac{(y+\frac{x}{\sqrt{3}})}{2}x$, despejando y de esta relación, resulta $y = \frac{3a^2 - 4x^2}{4\sqrt{3}x}$

Por otra parte la función que hay que minimizar es $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, sustituyendo y por la expresión anterior resulta:

d = $\sqrt{x^2 + (\frac{3a^2 - 4x^2}{4\sqrt{3}x})^2}$, derivando respecto de x e igualando a 0, llegamos a la ecuación simplificada: $64x^4 - 9a^4 = 0$, de donde $x = \frac{\sqrt{6}}{2}a$

Sustituyendo en el valor de d, obtenemos que la longitud mínima del segmento que divide al triángulo en dos áreas iguales es $d = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Un foco cuelga sobre el centro de una mesa redonda de radio r. ¿A qué altura de la mesa debe estar el foco para que la iluminación de un objeto que se encuentre en el borde de la mesa sea la mejor posible? (La iluminación es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco de luz)



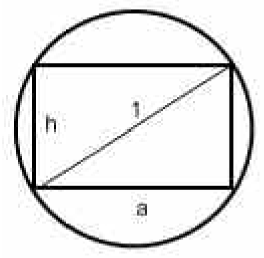
Sea I = $\frac{i.\cos y}{d^2}$ donde i es la intensidad de luz, y el ángulo de incidencia y de la distancia del foco al objeto iluminado en el borde de la mesa. Puesto que $d^2 = x^2 + r^2$ y x = r/tag y. Tenemos que

$I = \frac{i.\cos y}{r^2(1+\cot g^2 y} = \frac{i.\cos y.sen^2 y}{r^2}$, derivando respecto de y e igualando a 0, resulta la ecuación trigonométrica:

$seny(2\cos^2 y - sen^2 y) = 0$ de donde seny=0 lo descartamos por ser y=0.
por tanto resolvemos el otro factor obteniendo 2.$\cos^2$y - sen^2 y = 0 entonces
tag^2y = 2, de donde $tagy = \sqrt{2}$
Pero sabemos que tag y = r/x, por tanto $x = \sqrt{2}r$

De un tronco redondo de diámetro d se debe cortar una viga de sección rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de dicha viga para que esta tenga una resistencia a la flexión máxima, sabiendo que la resistencia a la flexión es proporcional al producto de la anchura por el cuadrado de la altura de la sección.

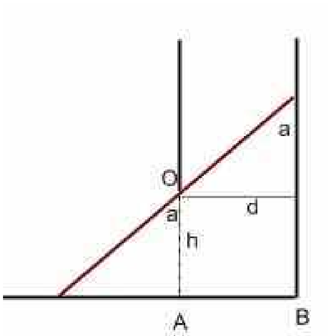
R = k.a.h^2, puesto que d^2=h^2 + a^2



R = k.a (d^2-a^2) = kad^2 - ka^3. Derivando respecto de a e igualando a 0 obtenemos kd^2 - $3ka^2$ = 0, de donde a =

$$a = \frac{d}{\sqrt{3}} \text{ y } h = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{3}}$$

Determinar la altura mínima h= OA de la puerta de una torre vertical para que a través de ella se pueda introducir en la torre una barra rigida de longitud l, cuyo extremo resbalará a lo largo de la línea de tierra AB. La anchura de la torre es d < l



La línea roja es la barra de longitud l.
Tenemos que

$$l = h.\sec a + d.\cos eca$$
$$h = (l - d.\cos eca).\cos a$$

derivando respecto de a e igualando a 0 tenemos:

$$h' = d\cot ga.\cos eca.\cos a - l.sena + d.sena.\cos eca = d - l.sen^3 a = \mathbf{0}$$

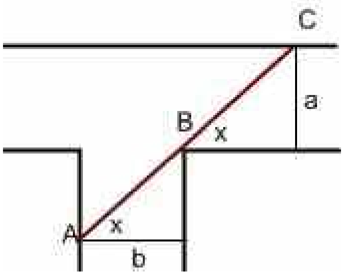
$$sena = \sqrt[3]{\frac{d}{l}} = \left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{3}}, \ \mathbf{a} = arcsen\left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$$

con lo que $h = \left(l - d.\cos ec(arcsen\left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{3}})\right).\cos arcsen\left(\frac{d}{l}\right)^{\frac{1}{3}}$

Sabemos que cosec (arcsen x) = $\frac{1}{x}$ y cos(arcsen x) = $\sqrt{1-x^2}$. Así pues

$$h = \left(l - d.\frac{l^{\frac{1}{3}}}{d^{\frac{1}{3}}}\right).\left(1 - \frac{d^{\frac{2}{3}}}{l^{\frac{2}{3}}}\right)^{1/2} = \left(l - l^{\frac{1}{3}}d^{\frac{2}{3}}\right)\frac{\left(l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}}\right)}{l^{\frac{1}{3}}} = \frac{l^{\frac{1}{3}}(l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}})(l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{1}{3}}} = (l^{\frac{2}{3}} - d^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

Hacia un río cuya anchura es igual a* a*, bajo un ángulo recto, se ha construido un canal de anchura* b*. Hallar la longitud máxima de un tronco que puede pasar del río al canal.



La longitud del tronco es AB+BC, es decir que

$l = b.\sec x + a.\cos ec x$, derivamos respecto del ángulo x y tenemos:

$$l' = -b\sec x.tagx + a\cos ecx.\cot gx = \frac{-b.senx}{\cos^2 x} + \frac{a.\cos x}{sen^2 x}$$

igualando a 0

$-bsen^3 x + a.\cos^3 x = 0$, dividiendo por $\cos^3$x $a = b.tag^3 x$

$tagx = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, x= $arctg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$l = b.\sec arctg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} + a.\cos ecarctg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Sabemos que sec.arctgα = 1/cos(arctgα), como cosα = $\sqrt{\frac{1}{1+tag^2\alpha}}$

$$b.\sec arctg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{b}{\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{3}}}}} = \frac{b\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}}$$

Sabemos tambien que cosec(arctagα)= 1/sen(arctagα), como $sen\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{tag^2\alpha}}}$

$$a.\cos ecarctg\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}}}} = \frac{a\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}}$$

De donde:

$$l = \frac{b\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}} + \frac{a\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}} = \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{b^{1/3}}+\frac{a}{a^{1/3}}\right) = \left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{\frac{3}{2}}$$