1. ***Determina la función generatriz para el número de formas de distribuir 35 monedas de un euro entre cinco personas, si (a) no hay restricciones; (b) cada persona obtiene al menos un euro; (c) cada persona obtiene al menos dos euros; (d) la persona de mayor edad obtiene al menos 10 euros; y (e) las dos personas más jóvenes deben obtener al menos 10 euros.***

SOLUCIÓN: La solución se corresponde con el coeficiente de x^{35} de:

a) $(1+x+x^2+ ...)^5$; b) $(x+x^2+ ...)^5$; c) $(x^2+x^3+ ...)^5$
d) $(x^{10}+ x^{11}+ .....).(1+x+x^2+...)^4$
e) $(x^{10}+ x^{11}+ .....)^2. (1+x+x^2+...)^2$

2. ***Encuentre las funciones generatrices para las siguientes sucesiones. (Grimaldi)***

a) $\binom{8}{0},\binom{8}{1}...\binom{8}{8}$ ***b)*** $\binom{8}{1},2\binom{8}{2},3\binom{8}{3}...,8\binom{8}{8}$
c) 1, -1, 1, -1, 1, ... ***d) 0, 0, 0, 1,1,1,1,1,1...***
e) 0, 0, 0, 6, -6, 6, -6, 6... ***f) 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...***
g) 1, 2, 4, 8, 16 ... ***h) 0, 0, 1, a, a^2, a^3, ..., con $a\neq 0$***

SOLUCIÓN:

a) Obviamente son los coeficientes del desarrollo de $\mathbf{(1+x)^8}$

b) Si derivamos $f(x) = \sum_{i=0}^{8}\binom{8}{i}x^i$, obtendremos $f'(x) = \sum_{i=1}^{8} i.\binom{8}{i}x^{i-1}$, cuyos coeficientes son los de la sucesión dada. Dado que la función generatriz de f(x) es $(1+x)^8$, entonces la función generatriz de la sucesión dada es $\mathbf{8(1+x)^7}$

c) $f(x) = 1 – x + x^2 – x^3 + x^4 ...$ (1)

$x.f(x) = \quad x – x^2 + x^3 – x^4 ...$ (2)

Sumando ambas expresiones obtenemos $(1+x)f(x) = 1$, de donde

f(x) = 1/(1+x)

d) $f(x) = x^3 + x^4 + x^5 + ... = x^3(1+ x + x^2 + ...)$. Ahora bien, es fácilmente demostrable (inténtese como ejercicio) que la función generatriz de la sucesión constante k, k, k, k, ... es k/(1-x); en particular para 1,1,1, será 1/(x-1), de donde:

$\mathbf{f(x) = x^3/ (1-x)}$

(En general la función generatriz de la sucesión 0, ..., 0, 1,1,1,1,1,1... siendo 0 los k primieros términos, es $f(x) = x^k/ (1-x)$)

e) $f(x) = 6x^3 – 6x^4 + 6x^5 - ... = 6x^3 (1 – x + x^2 - ...)$ y aplicando el apartado c) la función generatriz pedida es:

$\mathbf{f(x) = 6x^3/ (1+x)}$

f) $f(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...$ (1).

$-x^2.f(x) = -x^2 - x^4 - x^6 - \ldots$ (2)

Sumando ambas expresiones obtenemos $(1-x^2)f(x) = 1$, de donde

$$\mathbf{f(x) = 1/ (1-x^2)}$$

g) $f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \ldots$ (1)
$-2xf(x) = -2x - 4x^2 - 8x^3 - 16x^4 - \ldots$ (2)

Sumando ambas expresiones obtenemos $(1-2x)\, f(x) = 1$, de donde

$$\mathbf{f(x) = 1/ (1-2x)}$$

h) $f(x) = x^2 + ax^3 + a^2 x^4 + a^3x^6 + \ldots = x^2.(1 + ax + a^2x^2 + \ldots)$. El segundo factor $1 + ax + a^2x^2 + \ldots$, es una generalización del apartado g), de donde

$$\mathbf{f(x) = x^2/(1-ax)}$$

3. ***Determine la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices. (Grimaldi)***
a) $f(x) = (2x-3)^3$ ***b)*** $f(x) = x^4/(1-x)$ ***c)*** $f(x) = x^3/(1-x^2)$
d) $f(x) = 1/(1+3x)$ ***e)*** $f(x) = 1/(3-x)$ ***f)*** $f(x)=1/(1-x)+3x^7-11$

<u>SOLUCIÓN:</u>

a) Desarrollando el cubo del binomio, se obtiene la sucesión de coeficientes, en este caso en orden decreciente

$\binom{3}{i}(-1)^i.3^i.2^{3-i}$ para i=0...3, es decir: 8, -36, 54, -27

La sucesión pedida es **-27, 54, -36, 8, 0, 0, 0, 0, ...**

b) $f(x) = x^4.\ 1/(1-x)$; dado que $1/(1-x)$ es la función generatriz de la sucesión constante 1,1,1,1, resulta que el polinomio generatriz resultante es $x^4(1+x+x^2+ \ldots)$, por tanto la sucesión pedida es **0, 0, 0, 0, 1,1,1,1,1,1.....**

c) $f(x) = x^3.\ 1/(1-x^2)$; dado que $1/(1-x^2)$ es la función generatriz de la serie polinómica, como vimos en el apartado c) del ejercicio anterior, $1 + x^2 + x^4 + \ldots$
resulta que el polinomio generatriz resultante es $x^3 (1 + x^2 + x^4 + \ldots)$, de donde la sucesión pedida es **0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 ....**

d) $f(x) = 1/ (1+3x)$. Dividiendo en la forma usual, obtenemos como cociente:
$1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \ldots$ por tanto la sucesión es $a_n = (-1)^{n+1}.3^{n-1}$, es decir

1, -3, 9, -27, 81, -243, ...

e) $f(x) = 1/ (1-3x)$. Dividiendo, obtenemos como cociente:
$1 + 3x + 9x^2 + 27x^3 + \ldots$ por tanto la sucesión es $a_n = 3^{n-1}$, es decir

1, 3, 9, 27, 81, 243, ...

f) $f(x)=1/(1-x)+3x^7-11$. Como $1/(1-x)$, es la función generatriz de la sucesión constante 1, la dada genera la sucesión

-10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1....

4. ***En cada uno de los siguientes ejercicios, f(x) es la función generatriz de la sucesión a_o, a_1, a_2, ... y g(x) la de la sución b_0, b_1, b_n.... Exprese g(x) en términos de f(x), para:***

a*) $b_3 = 3$ y $b_n = a_n$ con $n\neq 3$* *b) $b_3 = 3$, $b_7=7$ y $b_n = a_n$ con $n\neq 3$ y $n\neq 7$*

c) $b_1=1$, $b_3 =3$ y $b_n=2a_n$ con $n\neq 3$ y $n\neq 1$

d) $b_1=1$, $b_3 =3$, $b_7 = 7$ y $b_n=2a_n+5$ con $n\neq 3$, 1, 7

(Grimaldi)

SOLUCIÓN:

a)

$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...$

$g(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + 3x^3 + a_4x^4 + ...$

restando ambas expresiones resulta $f(x) – g(x) = (a_3-3)x^3$, por tanto

$$\mathbf{g(x) = f(x) + (3-a_3)x^3}$$

b)

$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...$

$g(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + 3x^3 + a_4x^4 + ...+7x^7 + ...$

restando ambas expresiones resulta $f(x) – g(x) = (a_3-3)x^3+(a_7-7)x^7$ por tanto

$$\mathbf{g(x) = f(x) + (3-a_3)x^3+(7-a_7)x^7}$$

c)

$f(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...$

$g(x) = 2a_o + x + 2a_2x^2 + 3x^3 + 2a_4x^4 + ...$

$2f(x) – g(x) = (2a_1-1)x + (2a_3-3)x^3$

$$\mathbf{g(x) = 2f(x) - (2a_1-1)x - (2a_3-3)x^3}$$

5) Determine la constante en el desarrollo de $(3x^2 – (2/x))^{15}$ (Grimaldi)

SOLUCIÓN.

$(3x^2 – (2/x))^{15} = \sum_{i=0}^{15}(-1)^i(2/x)^i(3x^2)^{15-i}$. La constante es el coeficiente de grado 0, es decir el coeficiente de x^0 y como la potencia genérica de x en el sumatorio es $x^{-i}.(x^2)^{15-i} = x^{30-3i}$, igualando exponentes $30- 3i = 0$, de donde $i = 10$.

Por tanto el coeficiente de x^0 en el desarrollo es $(-1)^{10}.2^{10}.3^5 =$ **248832**

6) a) Encuentre el coeficiente de x^7 en $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^{15}$
b) Encuentre el coeficiente de x^7 en $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^n$ para n entero positivo. (Grimaldi)

<u>SOLUCIÓN:</u>
a) Como la función generatriz de 1,1,1, es 1/(1-x). El problema se reduce a hallar el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(1/(1-x))^{15} = (1-x)^{-15}$, resultando ser el número combinatorio $\binom{-15}{7}(-1)^7 = \binom{21}{7}$ (*)

(*) Recordemos que $\binom{-n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r}$, siendo n un entero positivo. (demostración hecha en el Grimaldi)

b) Al igual que antes el problema se reduce a hallar el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(1/(1-x))^n = (1-x)^{-n}$, resultando ser el número combinatorio $\binom{-n}{7}(-1)^7 = \binom{n+6}{7}$

7). Encuentre el coeficiente de x^{50} en $(x^7 + x^8 + x^9 + ...)^6$ (Grimaldi)

<u>SOLUCIÓN:</u>

La función generatriz asociada a $x^7 + x^8 + x^9 + ...$ es, como vimos en el ejercicio 1, apartado d) $x^7/(1-x)$.
Por tanto el coeficiente de grado 50 de $(x^7/(1-x))^6 = x^{42}.(1-x)^{-6}$ es el coeficiente de grado 8 de $.(1-x)^{-6}$, que es $\binom{-6}{8}(-1)^8 = \binom{13}{8} = 1287$

8. Encuentre el coeficiente de x^{20} en $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^5$ (Grimaldi)

<u>SOLUCION:</u>
En primer lugar calculemos la función generatriz asociada a la base:
$f(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6= x^2 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$
Sea $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ y $-x.g(x) = - x - x^2 - x^3 - x^4 – x^5$. Sumando ambos obtengo $g(x) = (1-x^5)/(1-x)$; por tanto $f(x) = x^2(1-x^5)/(1-x)$.
El problema se reduce a hallar el coeficiente de x^{20}, del desarrollo $[x^2(1-x^5)/(1-x)]^5 = x^{10}. (1-x^5)^5.(1-x)^{-5}$, que se reduce a su vez a hallar el coeficiente de x^{10} en $(1-x^5)^5.(1-x)^{-5}$.
Observemos que los grados de x en el primer factor solo pueden ser 0 o enteros positivos múltiplos de 5, por tanto los casos que se pueden presentar son los siguientes

Grados en factor $(1-x^5)^5$	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-5}$	Coeficiente
0	1	10	$\binom{-5}{10}=\binom{14}{10}$
5	$\binom{5}{1}(-1)^1$	5	$\binom{-5}{5}(-1)^5=\binom{9}{5}$
10	$\binom{5}{2}$	0	1

Así pues el coeficiente pedido es $\binom{14}{10}-\binom{5}{1}\binom{9}{5}+\binom{5}{2}$

9). Para n entero positivo, encuentre en ($1+x+x^2$)$(1+x)^n$ el coeficiente de (a) x^7 ; (b) x^8 y (c) x^r con $0\leq r\leq n+2$, y r entero. (Grimaldi)

SOLUCIÓN:

a)

Grados en factor $1+x+x^2$	Coeficiente	Grados en factor $(1+x)^n$	Coeficiente
0	1	7	$\binom{n}{7}$
1	1	6	$\binom{n}{6}$
2	1	5	$\binom{n}{5}$

Solución: $\binom{n}{7}+\binom{n}{6}+\binom{n}{5}$

b)

Grados en factor $1+x+x^2$	Coeficiente	Grados en factor $(1+x)^n$	Coeficiente
0	1	8	$\binom{n}{8}$
1	1	7	$\binom{n}{7}$
2	1	6	$\binom{n}{6}$

Solución: $\binom{n}{7}+\binom{n}{6}+\binom{n}{8}$

c)

Grados en factor $1+x+x^2$	Coeficiente	Grados en factor $(1+x)^n$	Coeficiente
0	1	r	$\binom{n}{r}$
1	1	r-1	$\binom{n}{r-1}$
2	1	r-2	$\binom{n}{r-2}$

Solución: $\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r-2}$

10). Encuentre el coeficiente de x^{15} en los siguiente ejercicios.
a) $x^3(1-2x)^{10}$ b) $(x^3-5x)/(1-x)^3$ c) $(1+x)^4/(1-x)^4$

SOLUCIÓN:

a) Obviamente 0 pues el máximo grado de ese desarrollo es 13.
b) Lo descomponemos en $x.(x^2-5)(1-x)^{-3}$. Así pues el problema se reduce a hallar el coeficiente de x^{14} en $.(x^2-5)(1-x)^{-3}$

Grados en factor (x^2-5)	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-3}$	Coeficiente
0	-5	14	$\binom{-3}{14}=\binom{16}{14}$
2	1	12	$\binom{-3}{12}=\binom{14}{12}$

Así pues el coeficiente pedido es $-5.\binom{16}{14}+\binom{14}{12}$

c)

Grados en factor $(1+x)^4$	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	$\binom{4}{0}=1$	15	$-\binom{-4}{15}=\binom{18}{15}$
1	$\binom{4}{1}=4$	14	$\binom{-4}{14}=\binom{17}{14}$
2	$\binom{4}{2}=6$	13	$-\binom{-4}{13}=\binom{16}{13}$
3	$\binom{4}{3}=4$	12	$\binom{-4}{12}=\binom{15}{12}$
4	$\binom{4}{4}=1$	11	$\binom{-4}{11}=\binom{14}{11}$

Así pues el coeficiente pedido es $\binom{18}{15}+4\binom{17}{14}+6\binom{16}{13}+4\binom{15}{12}+\binom{14}{11}$

11). ¿De cuántas formas se pueden asignar dos docenas de robots idénticos a 4 líneas de montaje de modo que a) al menos 3 robots se asignen a cada linea b) al menos 3 pero no más de 9

SOLUCIÓN:

a) La generatriz es $(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ...)^4$. Siendo la solución el coeficiente de x^{24}.

La función generatriz $x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ... = x^3(1+x+x^2 ...)$ es

$x^3 (1-x)^{-1}$. Y el coeficiente de x^{24} en $[x^3(1-x)^{-1}]^4$ equivale a hallar el coeficiente de x^{12} en $(1-x)^{-4}$ que es $\binom{-4}{12}=\binom{15}{12}$

El valor pedido sería $\binom{15}{12}$ = 455

b) En las cuatro lineas tendríamos
$(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ... + x^9)^4$. Siendo la solución el coeficiente de x^{24}.

La función generatriz de $x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + ... + x^9$ es $x^3(1+x+ ... +x^6)$ que es

$x^3 (1-x^7)(1-x)^{-1}$. Y el coeficiente de x^{24} en $[x^3 (1-x^7)(1-x)^{-1}]^4$ equivale a hallar el coeficiente de x^{12} en $(1-x^7)^4(1-x)^{-4}$. Los casos son:

Grados en factor $(1-x^7)^4$	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	1	12	$\binom{-4}{12}=\binom{15}{12}$
7	$-\binom{4}{1}=-4$	5	$-\binom{-4}{5}=\binom{8}{5}$

El valor pedido sería $\binom{15}{12}-4\binom{8}{5}$

12) ¿De cuántas formas pueden repartirse 3000 sobres idénticos, en paquetes de 25, entre cuatro grupos de estudiantes, de modo que cada grupo reciba al menos 150 sobres, pero no más de 1000 sobres?

SOLUCIÓN: 3000 sobres en paquetes de 25 son 120 paquetes, 150 sobres en paquetes de 25 son 6 y 1000 sobres iguales en paquetes de 25 son 40.

El problema se reduce a repartir 120 paquetes iguales en cuatro grupos de estudiantes de modo que cada grupo reciba al menos 6 paquetes pero no más de 40.

Es decir $(x^6 + x^7 + ... + x^{40})^4$, siendo la solución del problema el coeficiente de x^{120}

Función generatriz de $x^6 + x^7 + ... + x^{40} = x^6(1+x+...+x^{34})$ que es

$x^6(1-x^{35})(1-x)^{-1}$ Por tanto, el coeficiente de x^{120} de $[x^6(1-x^{35})(1-x)^{-1}]^4$ es el coeficiente de x^{96} de $(1-x^{35})^4(1-x)^{-4}$. Los casos son:

Grados en factor $(1-x^{35})^4$	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	1	96	$\binom{-4}{96}=\binom{99}{96}$
35	$-\binom{4}{1}=-4$	61	$-\binom{-4}{61}=\binom{64}{61}$
70	$\binom{4}{2}=6$	26	$\binom{-4}{26}=\binom{29}{26}$

Sol: $\binom{99}{96}-4\binom{64}{61}+6\binom{29}{26}$

13). Se distribuyen dos cajas de refrescos, con 24 botellas de un tipo, y 24 de otro, entre cinco peritos que realizan pruebas de sabores. ¿De cuántas formas pueden distribuirse las 48 botellas de manera que cada perito reciba: a) al menos dos botellas de cada tipo; b) al menos dos botellas de un tipo y tres del otro?

a) $(x^2 + x^3 + ...)^5(x^2 + x^3 + ...)^5$.
La función generatriz del problema sería $(x^2 + x^3 + ... + x^{16})^{10}$, y la solución sería el coeficiente de x^{48}
$[x^2.(1-x)^{-1}]^{10}$ equivale a calcular el coeficiente de x^{28} de $(1-x)^{-10}$

que es: $\binom{-10}{28} = \binom{37}{28}$

b) Para las del tipo A $(x^2 + x^3 + ...)^5$
y para las del tipo B $(x^3 + ...)^5$ ya que al menos han de recibir 3 La función generatriz que resuelve el problema es $(x^2 + x^3 + ...)^5 . (x^3 + ...)^5$ y mediante las generatrices correspondientes obtendríamos:

$[x^2(1-x)^{-1}]^5.[x^3(1-x)^{-1}]^5 = x^{25}.(1-x)^{-10}$
Se trata de hallar el coeficiente de x^{13} de $(1-x)^{-10}$
que es
$-\binom{-10}{13} = \binom{22}{13}$

14). Si se lanza 12 veces un dado, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados sea 30?

<u>SOLUCIÓN:</u>

En cada vez tenemos: $x^1 + x^2 + ... + x^6$. Al lanzar 12 veces, la función generatriz del problema es $(x^1 + x^2 + ... + x^6)^{12}$. Los casos favorables (es decir suma 30) lo constituye el coeficiente de x^{30}

La función generatriz asociada es $f(x) = x.(1-x^6)/(1-x)$
El problema se reduce a calcular el coeficiente de x^{30} de $[x.(1-x^6)/(1-x)]^{12}$ que se reduce a su vez a calcular el coeficiente de x^{18} de $.(1-x^6)^{12}.(1-x)^{-12}$
Los casos que se presentan son:

Grados en factor $(1-x^6)^{12}$	Coeficiente	Grados en factor $(1-x)^{-12}$	Coeficiente
0	1	18	$\binom{-12}{18}=\binom{29}{18}$
6	$-\binom{12}{1}=-12$	12	$\binom{-12}{12}=\binom{23}{12}$
12	$\binom{12}{2}=66$	6	$\binom{-12}{6}=\binom{17}{6}$
18	$-\binom{12}{3}=-220$	0	1

Los casos favorables son: $\binom{29}{18}-12\binom{23}{12}+66\binom{17}{6}-220$ = 19.188.950

Los casos posibles son 6^{12} = 2.176.782.336

Por tanto la probabilidad pedida es: **0,008815**

15). Carolina recoge dinero entre sus primas para darle una fiesta a su tía. Si ocho de sus primas prometen dar cada una 2, 3, 4 o 5 dólares y las otras dos dan cada una 5 o 10 dólares, ¿cuál es la probabilidad de que Carolina junte exactamente 40 dólares?

SOLUCIÓN:
Los casos favorables son aquellos en los que Carolina juntará 40 dólares, que viene dado por el coeficiente de x^{40} de $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^8.(x^5 + x^{10})^2$, que, haciendo las funciones generatrices de los polinomios base de los dos factores, resulta ser el coeficiente de x^{40} de la siguiente expresión:

$[x^2.(1-x^4)(1-x)^{-1}]^8. [x^5(1+x^5)]^2 = x^{26}.(1-x^4)^8.(1+x^5)^2(1-x)^{-8}$
reduciéndose a calcular el coeficiente de x^{14} de $.(1-x^4)^8.(1+x^5)^2(1-x)^{-8}$

Tenemos

Gr en $.(1-x^4)^8$	Coef	Gr en $(1+x^5)^2$	Coef	Gr en $(1-x)^{-8}$	Coef
0	1	0	1	14	$\binom{21}{14}$
0	1	5	2	9	$\binom{16}{9}$
0	1	10	1	4	$\binom{11}{4}$
4	-8	0	1	10	$\binom{17}{10}$
4	-8	5	2	5	$\binom{12}{5}$
4	-8	10	1	0	1
8	28	0	1	6	$\binom{13}{6}$
8	28	5	2	1	$\binom{8}{1}$

si multiplicamos por filas las columnas sombreadas y sumamos todos los productos, obtendríamos los casos favorables, que nos da:

116280 + 22880 + 330 – 155584 – 12672 -8 + 48048 + 448 = 19722

Los casos posibles son $RV_4^8 . RV_2^2 = 262144$

La probabilidad pedida es: **0,07523**

16). ¿De cuántas formas puede seleccionar Tomás n canicas de un gran surtido de canicas azules, rojas y amarillas, si la selección debe incluir un número par de las azules?

SOLUCIÓN:

Elección de las rojas $1+x+x^2+x^3+ ....$
Elección de las amarillas $1+x+x^2+x^3+ ....$
Elección de las azules $1+ x^2 + x^4 + ...$ (Considera que 0 es par y por tanto admite la posibilidad de que no haya bolas azules en la elección)

La solución es el coeficiente de x^n en la función $(1+x+x^2+ ...)^2.(1+x^2 + x^4+...)$ cuya función generatriz asociada es $(1/(1-x))^2.(1/(1-x^2))$. Se reduce al coeficiente de x^n de $(1/(1-x))^2(1/(1-x^2))$.

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)^3(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3} + \frac{D}{1+x}$$

$1 = A(1+x)(1-x)^2 + B (1-x^2) + C (1+x) + D (1-x)^3$
Si x=1, tenemos 1=2C; de donde C= ½
Si x= -1, tenemos 1= 8D, de donde D=1/8
Si x=0, tenemos 1=A + B + 5/8; A+B=3/8
Si x=2, tenemos 1 = 3A-3B +3/2 - 1/8; A-B=-1/8; de las dos últimas ecuaciones se obtiene A=1/8 y B=1/4

$$\frac{1}{(1-x)^2(1-x^2)} = \frac{1/8}{1-x} + \frac{1/4}{(1-x)^2} + \frac{1/2}{(1-x)^3} + \frac{1/8}{1+x} = \left(\frac{1}{8}\right)\sum_{i=0}^{\infty} x^i + \left(\frac{1}{4}\right)\left[\binom{-2}{0} + \binom{-2}{1}(-x) + \binom{-2}{2}(-x)^2 + ...\right]$$

$$.+\left(\frac{1}{2}\right)\left[\binom{-3}{0} + \binom{-3}{1}(-x) + \binom{-3}{2}(-x)^2 + ...\right] + \left(\frac{1}{8}\right)\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i.x^i$$

siendo el coeficiente de grado n (Se calcula el coef de grado en cada sumando) :

$$\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{4}\right).\binom{-2}{n} + \frac{1}{2}\binom{-3}{n} + \frac{1}{8}(-1)^n = \frac{1}{8}(1+(-1)^n) + \frac{1}{4}.\binom{n+1}{n} + \frac{1}{2}\binom{n+2}{n}$$

17). ¿Cómo puede María repartir 12 hamburguesas y 16 perritos calientes entre sus hijos Ricardo, Pedro, Cristóbal y Jaime, de modo que Jaime reciba al menos una hamburguesa y tres perritos calientes, mientras que sus hermanos reciben, cada uno, al menos dos hamburguesas, pero a lo sumo cinco perritos calientes?

Reparto de hamburguesas (en el orden Jaime, Ricardo, Pedro y Cristóbal)
$(x + x^2 + ...)(x^2+ ...)^3$
Reparto de perritos calientes (en el orden Jaime, Ricardo, Pedro y Cristóbal)
$(x^3 + x^2 + ...)(1 + x+ ... +x^5)^3$

El número de reparticiones de hamburguesas en las condiciones dadas es el coeficiente de x^{12} de $x./(1-x).[x^2/(1-x)]^3 = x^7.(1-x)^{-4}$ que se reduce al cálculo del coeficiente de x^5 en $(1-x)^{-4}$, resultando ser:

$$-\binom{-4}{5} = \binom{8}{5}$$

Es decir que hay 56 formas de repartir las hamburguesas en las condiciones expresadas.

El número de reparticiones de perritos calientes en las condiciones dadas es el coeficiente de x^{16} de $x^3/(1-x).[(1-x^6)/(1-x)]^3 = x^3.(1-x^6)^3.(1-x)^{-4}$ que se reduce al cálculo del coeficiente de x^{13} en $(1-x^6)^3(1-x)^{-4}$, resultando ser:

Gr en .$(1-x^6)^3$	Coef	Gr en $(1-x)^{-4}$	Coef
0	1	13	$-\binom{-4}{13} = \binom{16}{13}$
6	-3	7	$-\binom{-4}{7} = \binom{10}{7}$
12	3	1	$-\binom{-4}{1} = \binom{4}{1}$

Hay en total $\binom{16}{13} - 3\binom{10}{7} + 3\binom{4}{1} = 212$ formas de repartir los perritos

Por tanto los repartos posibles serían 56 . 212 = **11872**

18). Se tiene una bolsa con 5 canicas amarillas, 4 rojas y 5 blancas. Se eligen 1, 3 ó 5 amarillas, 2, 3 ó 4 rojas y 1, 4 ó 5 blancas, ¿de cuántas formas se pueden elegir 10 canicas?

<u>SOLUCION:</u>

Es el coeficiente de x^{10} de
$(x+x^3+ x^5).(x^2+ x^3 + x^4).(x + x^4+x^5) = x^4(1 +x^2+ x^4)(1+x+x^2).(1+x^3+x^4)$ que se reduce al coeficiente de x^6 de $(1 +x^2+ x^4)(1+x+x^2).(1+x^3+x^4)$ que se corresponde con

024, 204, 213, 420, que son 4 casos.

19). Calcula la función generatriz para el número de formas de tener n céntimos de euro en (a) monedas de uno y cinco céntimos de euro; (b) monedas de uno, cinco y diez céntimos de euro.

SOLUCIÓN:

a) Coeficiente de grado n de $(1+x+x^2+ \dots)(1+x^5 +x^{10} + x^{15}+\dots)$
b) Coeficiente de grado n de $(1+x+x^2+ \dots)(1+x^5 +x^{10} + x^{15}+\dots)(1+x^{10} +x^{20} + x^{30}+\dots)$

20). Determina la función generatriz para el número de soluciones enteras de las ecuación $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 20$ donde $-3 \le c_1$, $-3 \le c_2$, $-5 \le c_3 \le 5$, $0 \le c_4$.

SOLUCIÓN:
Para evitar los valores negativos, sumo 3 a cada valor de c_1 y c_2 y sumo 5 a cada valor de c_3, con lo que al miembro de la derecha he de sumarle 3+3+5 obteniendo

$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 =31$ donde $0 \le c_1$, $0 \le c_2$, $0 \le c_3 \le 10$, $0 \le c_4$.
que equivaldría al problema de repartir 31 canicas entre cuatro niños de modo que a uno de ellos le toque a lo sumo 10 canicas.

Sería el coeficiente de x^{31} de $(1+x+x^2+ \dots)^3(1+x+x^2+ \dots +x^{10})$

Coeficiente de x^{31} de $(1-x)^{-3}(1-x^{11})/(1-x)$; o sea $(1-x^{11})(1-x)^{-4}$

Gr en .$(1-x^{11})$	Coef	Gr en $(1-x)^{-4}$	Coef
0	1	31	$-\binom{-4}{31}=\binom{34}{31}$
11	-1	20	$\binom{-4}{20}=\binom{23}{20}$

Solución es $\binom{34}{31}-\binom{23}{20}$

21) Calcule el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación:
$c_1 + c_2 + c_3 +c_4 =12$, donde $-2 \le c_1 \le 6, \quad -3 \le c_2 \le 4, \quad c_3 \ge 0, \quad c_4 \ge 0$
(Ejercicio propuesto en el Examen de Febrero 2009 en La Coruña)

SOLUCIÓN:
Como nos piden las *no negativas,* el problema consiste en averiguar el número de soluciones enteras de la ecuación dada para $0 \le c_1 \le 6, \quad 0 \le c_2 \le 4, \quad c_3 \ge 0, \quad c_4 \ge 0$
Coeficiente de grado 12 de $(1+x+\dots+x^6)(1+x+\dots+x^4)\ (1+x+x^2+\dots)^2$
Coeficiente de grado 12 de $(1-x^7)(1-x^5)(1-x)^{-4}$

Gr en .(1-x^7)	Coef	Gr en (1-x^5)	Coef	Gr en $(1-x)^{-4}$	Coef
0	1	0	1	12	$\binom{-4}{12}=\binom{15}{12}$
7	-1	0	1	5	$-\binom{-4}{5}=\binom{8}{5}$
0	1	5	-1	7	$-\binom{-4}{7}=\binom{10}{7}$
7	-1	5	-1	0	1

La solución es: $\binom{15}{12}-\binom{8}{5}-\binom{10}{7}+1=280$

21.) Hállense a, b, k de modo que (a + bx)^k sea la función generatriz para la sucesión 1, 2/5, 12/25, 88/125, ... (Grimaldi)

<u>SOLUCIÓN:</u>

$(a+bx)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}b^i a^{k-i}.x^i$, por tanto:

$\binom{k}{0}b^0 a^k = 1;\ \binom{k}{1}b^1 a^{k-1} = \frac{2}{5};\ \binom{k}{2}b^2 a^{k-2} = \frac{12}{25};\ \binom{k}{3}b^3 a^{k-3} = \frac{88}{125}$

lo que conduce a las siguientes ecuaciones respectivamente

(1) $a^k = 1$, de donde se obtiene que a =1
(2) $kb = 2/5$
(3) $\frac{k(k-1)b^2}{2} = \frac{12}{25}$
(4) $\frac{k(k-1)(k-2)b^3}{6} = \frac{88}{125}$

Dividiendo (4) entre (3) se obtiene: $\frac{(k-2)b}{3} = \frac{88}{125}$, que junto con la ecuación (2), resulta k= -1/5 y b = -2.

22). ***Hállense los cinco primeros términos de las siguientes expansiones***
a) (1 + 2x)$^{1/3}$ ***b) (2-x)$^{1/4}$***

<u>SOLUCIÓN</u>:

a) f(0)=1
f'(x) = 2(1/3)$(1 + 2x)^{-2/3}$ = (2/3)$(1 + 2x)^{-2/3}$ f'(0)=2/3

f''(x) = $(-4/9)(1 + 2x)^{-5/3}$ f''(0)=-4/9

f'''(x)= $(20/27)(1 + 2x)^{-8/3}$ f'''(0)= 20/27

f'v(x)= $(-160/81)(1 + 2x)^{-11/3}$ $f^{iv}(0) = -160/81$

Los cinco primeros términos de la expansión (de McLaurin) pedida son

$$1+\frac{2}{3}x+\frac{-4/9}{2!}x^2+\frac{20/27}{3!}x^3+\frac{-160/81}{4!}x^4 =$$

$$1+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2+\frac{10}{81}x^3-\frac{20}{243}x^4$$

b) $f(0)=\sqrt[4]{2}$

$f'(x) = (-1/4)(2-x)^{-3/4}$ de donde $f'(0) = \dfrac{-1}{4\sqrt[4]{8}}$

$f''(x) = (-3/16)(2-x)^{-7/4}$ de donde $f''(0) = \dfrac{-3}{32\sqrt[4]{8}}$

$f'''(x) = (-21/64)(2-x)^{-11/4}$ de donde $f'''(0) = \dfrac{-21}{256\sqrt[4]{8}}$

$f'^{v}(x) = (-231/256)(2-x)^{-15/4}$ de donde $f'^{v}(x) = \dfrac{-231}{1848\sqrt[4]{8}}$

La expansión de McLaurin de grado 4 es

$$\sqrt[4]{2}-\frac{1}{4\sqrt[4]{8}}x-\frac{3}{64\sqrt[4]{8}}x^2-\frac{21}{1536\sqrt[4]{8}}x^3-\frac{231}{44352\sqrt[4]{8}}x^4$$

23). ¿De cuántas formas se pueden seleccionar siete números no consecutivos entre el 1 y el 50?

SOLUCIÓN.

Una posible elección sería 3,5,7,9,11,13, 15
No valdría 3,5,7,9,11,8,18 ya que el 7 y el 8 son consecutivos.

Entendido así el problema, lo abordaremos del siguiente modo:

Tómese un caso, por ejemplo 1,5,7,9,11,13,50, ordénense y establecer las diferencias consecutivas, teniendo en cuenta que el primer término resta al 1 y el último al 50 en todos los casos. Este caso nos daría:

0,4,2,2,2,2,37,0 cuya suma es 49

Otro ejemplo sería 13, 34, 21, 15, 5, 8, 11. Los ordenamos 5, 8, 11, 13, 15, 21, 34, cuyas diferencias consecutivas nos darían

4, 3, 3, 2, 2, 6, 13, 16, cuya suma es 49

Se tiene que todos los casos que buscamos tienen la propiedad de que ordenados y restados consecutivamente nos dan 49. Y estas restas tienen que ser siempre mayores que 1 ya que si hubiese algún 1 querría decir que tendríamos dos números consecutivos, salvando los extremos que pueden ser 0 o 1 (ya que si una serie empieza por 1 genera un 0 en la primera diferencia y si empieza por 2 genera un 1 el la primera diferencia. Igualmente si acaba en 50 genera un cero en la última diferencia y si acaba en 49 genera un 1 en la última diferencia)

El problema se reduce a resolver el número de soluciones de la ecuación

$x_1 + x_2 + ... + x_8 = 49$ con $x_i \geq 2$ con i=2,...7 y $x_1 \geq 0$, $x_8 \geq 0$. Equivalente a repartir 49 canicas entre 8 niños tocándole al menos 2 a 6 de ellos.

El resultado sería el coeficiente de x^{49} de $(x^2 + x^3 + ...)^6(1+x+x^2+...)^2$
coeficiente de x^{49} $x^{12}(1-x)^{-6}$ $(1-x)^{-2}$, coeficiente de x^{37} de $(1-x)^{-8}$ que es

$$-\binom{-8}{37} = \binom{44}{47}$$

25). ***Comprueba que el número de descomposiciones de un entero positivo n en sumandos impares coincide con el número de descomposiciones de n en sumandos distintos.***

<u>SOLUCIÓN:</u>

El número de descomposiciones de un entero positivo n en sumandos impares es el coeficiente de x^n de

$$(1+x+x^2+x^3+...)(1+x^3+x^6+...)(1+x^5+x^{10}+...)...$$

$$\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^3}.\frac{1}{1-x^5}... = \prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i+1}}$$

El número de descomposiciones de n en sumandos distintos es el coeficiente de x^n de

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)....$$

y dado que

$$1+x = \frac{1-x^2}{1-x} \qquad 1+x^2 = \frac{1-x^4}{1-x^2} \qquad 1+x^3 = \frac{1-x^6}{1-x^6} \quad ...$$

Tenemos que

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3).... = \frac{1-x^2}{1-x}.\frac{1-x^4}{1-x^2}.\frac{1-x^6}{1-x^3}... = \frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^3}.\frac{1}{1-x^5}... = \prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2i+1}}$$

siendo ambas funciones generatrices iguales.

28). En $f(x) = [1/(1-x)].[1/(1-x^2)].[1/(1-x^3)]$ el coeficiente de x^6 es 7. Interprétese este resultado en función de particiones de 6.

SOLUCIÓN.
Quiere decir que el número de particiones de 6 en donde solo intervienen el 1, 2 y 3 es 7.

29). Hállese la función generatriz para el número de soluciones enteras de

- ***a)*** ***$2w + 3x + 5y + 7z = n$ con $w, x, y, z \geq 0$***
- ***b)*** ***$2w + 3x + 5y + 7z = n$. con $w \geq 0$, $x, y \geq 4$, $z \geq 5$***
- ***c)*** ***$2w + 3x + 5y + 7z = n$ con $2 \leq w \leq 4 \leq x \leq 7 \leq y \leq 10 \leq z$***

SOLUCIÓN:

a) equivale a averiguar la función generatriz para las particiones de n en las que sólamente intervengan el 2, 3, 5 y 7

es decir: $(1+x^2+x^4+x^6+...)(1+x^3+x^6+x^9+...)(1+x^5+x^{10}+...)(1+x^7+x^{14}+...)$, o sea
$f(x) = [1/(1-x^2)].[1/(1-x^3)][1/(1-x^5)].[1/(1-x^7)]$

b)
$(1+x^2+x^4+x^6+...)(x^{12}+x^{15}+x^{18}+...)(x^{20}+x^{25}+...)(x^{35}+x^{42}+...)$, es decir:

$$\frac{1}{1-x^2}\frac{x^{12}}{1-x^3}\frac{x^{20}}{1-x^5}\frac{x^{35}}{1-x^7} = x^{68}.f(x)$$

c) $(x^4+x^6+x^8)(x^{12}+x^{15}+x^{18}+x^{21})(x^{35}+x^{40}+x^{45}+x^{50})(x^{70}+x^{80}+...) =$

$$\frac{(x^4 + x^6 + x^8)(x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21})(x^{35} + x^{40} + x^{45} + x^{50}).x^{70}}{x - 1} =$$

$$\frac{x^{121}(1 + x^2 + x^4)(1 + x^3 + x^6 + x^9)(1 + x^5 + x^{10} + x^{15})}{x - 1}$$

30) Detérminese la función generatriz para el número de maneras de tener la cantidad n, con $0 \leq n \leq 99$, en monedas de uno, de cinco, de diez, de veinticinco y de cincuenta.

SOLUCIÓN:

Es el número de soluciones enteras de la ecuación

$x + 5y + 10z + 25t + 50w = n$ con x, y, z, t y w enteros no negativos.

Equivale a la partición de n utilizando 1, 5, 10, 25 y 50

Es decir que la solución sería el coeficiente de x^n de la función generatriz

$(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots)(1+x^{10}+x^{20}+\ldots)(1+x^{25}+x^{50}+\ldots)(1+x^{50}+x^{100}+\ldots)$ (1)

es decir $$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{25})(1-x^{50})} \quad (2)$$

aunque obviamente también podríamos limitar (1) a:

$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{99})(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{95})(1+x^{10}+x^{20}+\ldots+x^{90})(1+x^{25}+x^{50}+x^{75})(1+x^{50})$

31) Encuentra la función generatriz exponencial de las siguientes sucesiones, siendo a número real:
a) 1, – 1, 1, – 1, 1, – 1, … b) 1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, … c) 1, –a, a^2, – a^3, a^4, …
d) 1, a^2, a^4,a^6… e) a, a^3, a^5, a^7, … f) 0, 1, 2(2), 3(2^2), 4(2^3), …

SOLUCIÓN:
Partiendo de que la función generatriz exponencial de la sucesión 1,1,1,1... es e^x

a) La función es e^{-x}

Ya que, puesto que la derivada n-ésima de e^{-x} es $(-1)^n e^{-x}$ y al ser sustituida en 0 nos da $(-1)^n$, el desarrollo de e^{-x} de McLaurin, es:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}x^i \text{, cuyos coeficientes de } \frac{x^i}{i} \text{ son 1, -1, 1, -1 ...}$$

b) La solución es e^{2x}

la derivada n-ésima de e^{2x} es $2^n.e^{2x}$ y al ser sustituida en 0 nos da 2^n. El desarrollo de McLaurin de e^{2x} es:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^i}{i!}x^i \text{ cuyos coeficientes de } \frac{x^i}{i} \text{ son 1, 2, } 2^2, 2^3 \ldots$$

c) Combinando a) con b) la solución es e^{-ax}

d) e^{a^2x}

e) ae^{a^2x}

f) xe^{2x}

Los tres últimos casos siguen un razonamiento completamente análogo a los anteriores.

32.) Determina la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices exponenciales:

a) $3e^{3x}$ b) $6e^{5x} – 3e^{2x}$ c) $e^x + x^2$ d) $e^{2x} – 3x^3 + 5x^2 + 7x$ e) $1/(1-x)$

f) $3/(1 – 2x) + e^x$

SOLUCIÓN.

a) La derivada n-ésima de la función es $3^{n+1}e^{3x}$

Si hacemos el desarrollo de McLaurin, obtenemos :

$3e^{3x} = 3+3^2x+\frac{3^3}{2!}x^2+\frac{3^4}{3!}x^3+\ldots$, la sucesión generada es 3, 3^2, 3^3, 3^4, ...

b) La derivada n-ésima de la función es $6.5^ne^{5x} – 3\cdot 2^ne^{2x}$ que al ser sustituidas en 0 se obtiene la sucesión $6.5^n – 3.2^n$

c) Las derivadas sucesivas son $e^x + 2x$, $e^x + 2$, e^x , e^x , ... que generan la sucesión

1, 1, 3, 1, 1, 1,.....

También sin recurrir a las derivadas, podemos pensarlo así:

$e^x + x^2 = (1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!)+...) + x^2 = (1+x+[(1/2!)+1]x^2+(x^3/3!)+ (x^4/4!)= 1+x+(3/2!)x^2+(x^3/3!)+ (x^4/4!)$ que genera la sucesión 1,1,3,1,1,1...

d) Las derivadas sucesivas son $2e^{2x} – 9x^2 + 10x +7$, $4e^{2x} – 18x + 10$, $8e^{2x} -18$, y a partir de aquí serían 2^ne^{2x} para $n\geq 4$, obteniéndose la sucesión:

1, 9, 14, -10, 16, 32, 64,....

e) Las derivadas sucesivas de $(1-x)^{-1}$ son

$f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f'''(x) = 6(1-x)^{-4}$, ... $f^{n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$

La sucesión generada es 1,1,2,6,24,... es decir n!

f) $3/(1-2x) + e^x$ Derivadas sucesivas de $3.(1-2x)^{-1} + e^x$ son

$6(1-2x)^{-2} + e^x$, $24(1-2x)^{-3} + e^x$, $144(1-2x)^{-3} + e^x$

4, 7, 25, 145, ... $3\ 2^n n! + 1$

Sin recurrir a las derivadas podemos razonarlo así:

$3/(1-2x) + e^x = 3(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+2^4x^4+...) + (1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!)+...)=$
$(3+3.2x+((2!.3.2^2)/2!)x^2+((3!3.2^3)/3!)x^3+((4!.3.2^4)/4!)x^4+...) +$
$(1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!)+...)$ y sumando los coeficientes de igual grado se obtiene una sucesión del tipo
$a_0+a_1x+(a_2/2!)x^2+(a_3/3!)x^3+...$ donde los a_n son $3\ 2^n n! + 1$

33) a) Dada la función generatriz $2e^{2x}$ ¿cuál es la sucesión que determina, si se considera que dicha función es ordinaria?

b) Dar un fórmula explícita para la función generatriz exponencial de la sucesión $a_n = 1/(n+1)$.

(Ejercicio propuesto en el examen de Febrero de 2009 en La Coruña)

SOLUCIÓN:

a) la derivada n-ésima de $2e^{2x}$ es $2^{n+1}.e^{2x}$ y al ser sustituida en 0 nos da 2^{n+1}. El desarrollo de McLaurin de e^{2x} es:

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{i+1}}{i!} x^i$ cuyos coeficientes de x^n son $\frac{2^{n+1}}{n!}$, por tanto la sucesión pedida, al considerar la función generatriz ordinaria, es $a_n = \frac{2^{n+1}}{n!}$

b) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3.2!}x^2 + \frac{1}{4.3!}x^3 + \ldots = 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{4!}x^3$

$xf(x) = x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots = e^x - 1$, de donde $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

34) . Encuentra la función generatriz exponencial del número de formas en que se pueden ordenar n letras, n ≥ 0, seleccionadas de cada una de las siguientes palabras: a) HAWAII b) MISSISSIPPI c) ISOMORPHISM

SOLUCIÓN:

a) Coeficiente de $x^6/6!$ de $(1+x)^2(1+x+(x^2/2!))^2$, puesto que la H y la W aparecen 1 vez (1+x), mientras que la A y la I lo hacen 2 veces $1+x+(x^2/2!)$

b) Coeficiente de $x^{11}/11!$ de $(1+x)\,(1+x+(x^2/2!))\,(1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!))^2$, puesto que hay una sola letra que aparece una vez que es la M, una letra que se repite 2 veces (P) y la M y la I que lo hacen 4 veces.

c) Coeficiente de $x^{11}/11!$ de $(1+x)^3(1+x+(x^2/2!))^4$, puesto que hay tres letras que solo aparecen una vez (R, P, H) y 4 que se repiten dos veces (I, S, O, M)

35.) Para el apartado (b) del ejercicio 20, ¿cuál es la función generatriz exponencial si la disposición debe contener al menos dos letras I?

SOLUCIÓN:

En este caso el factor correspondiente a la I, que es uno de los $1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!)$, quedaría así: $(x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!)$, es decir que finalmente la función generatriz correspondiente sería:

$(1+x).\ (1+x+(x^2/2!)).\ ((x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!)).\ (1+x+(x^2/2!)+(x^3/3!)+ (x^4/4!))$

Siendo cada factor correspondiente a las letras M , P, I, S, respectivamente.

36) Se genera una sucesión ternaria (0, 1, 2) de 20 dígitos de forma aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de que (a) tenga un número par de unos? (b) tenga un número par de unos y un número par de doses? (c) tenga un número impar de ceros? (d) el total de ceros y unos sea impar? (e) el número total de ceros y unos sea par?

SOLUCIÓN:

Los casos posibles son $RV_{3,20} = 3^{20}$

a) Casos favorables: Coeficiente de $x^{20}/20!$ en el desarrollo de $(1+x+(x^2/2!)+...)^2.(1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...)$, pues $(1+x+(x^2/2!)+...)$ es para la elección del 0 y el 2, mientras que al obligarnos a que tenga exactamente un número par de unos, la elección del 1, sería $1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...$

Puedo tratar de averiguarlo así:

Dado que $1+x+(x^2/2!)+... = e^x$, entonces $(1+x+(x^2/2!)+...)^2 = e^{2x}$,

y $1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Con lo cual nuestra función generatriz exponencial es $\dfrac{e^{3x}+e^x}{2}$, cuya derivada enésima es $\dfrac{3^n e^{3x}+e^x}{2}$, que al sustituir en 0 (para el desarrollo de Mclaurin) nos da $\dfrac{3^n+1}{2}$

por tanto el desarrollo de McLaurin de nuestra función es:

$\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{3^i+1}{2.i!}.x^i$, siendo el coeficiente de $x^{20}/20!$ igual a $\dfrac{3^{20}+1}{2}$ que es la solución de los casos favorables a nuestro problema.

Por tanto la probabilidad pedida es $\dfrac{3^{20}+1}{2.3^{20}}$

d) Que tenga un número par de unos y un número par de doses:

$(1+x+(x^2/2!)+...)$ elección para el 0

$1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...$ elección para el 1 y el 2

El resultado de los casos favorables es el coeficiente de $x^{20}/20!$ de la función generatriz

$$(1+x+(x^2/2!)+...)\ (1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...)^2 = e^x.\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{3x}+e^{-x}+2e^x}{4},$$

cuya derivada enésima es $\dfrac{3^n e^{3x}+(-1)^n e^{-x}+2e^x}{4}$, que al ser sustituida en x=0, nos da $\dfrac{3^n+(-1)^n+2}{4}$, obteniéndose el desarrollo de Maclaurin siguiente:

$\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{3^i+(-1)^i+2}{4.i!}x^i$, cuyo coeficiente de de $x^{20}/20!$ es $\dfrac{3^{20}+3}{4}$

Por tanto, la probabilidad pedida es $\dfrac{3^{20}+3}{4.3^{20}}$

e) Que tenga un número impar de ceros

$(x+(x^3/3!)+(x^5/5!)+...)$ elección para el 0
$(1+x+(x^2/2!)+...)$ elección para el 1 y el 2.

Los casos favorables vienen determinados por el coeficiente de $x^{20}/20!$ de la función generatriz:

$(1+x+(x^2/2!)+...)^2(x+(x^3/3!)+(x^5/5!)+...) = e^{2x}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{3x}-e^x}{2}$, cuya derivada enésima es $\dfrac{3^n e^{3x}-e^x}{2}$, que sustituyendo en 0 da: $\dfrac{3^n-1}{2}$, siendo el desarrollo de MacLaurin de nuestra función:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{3^i-1}{i!.2}x^i \text{ cuyo coeficiente de } x^{20}/20! \text{ es } \frac{3^{20}-1}{2}.$$

La probabilidad pedida es $\dfrac{3^{20}-1}{2.3^{20}}$

d) El total de ceros y unos sea impar

Para que una suma sea impar, necesariamente ha de ser impar uno de los sumandos y el otro par, por tanto tenemos dos situaciones: Que el total de ceros sea par y unos sea impar y viceversa. En cualquier caso las funciones generatrices de ambas situaciones son idénticas, por lo que basta con calcular un caso y multiplicarlo por dos.

Para el caso en que la cantidad de ceros sea par y unos impar, los casos favorables vendrían dados por el coeficiente de $x^{20}/20!$ del desarrollo de

$(1+x+(x^2/2!)+...).\ (x+(x^3/3!)+(x^5/5!)+...).\ (1+(x^2/2!)+(x^4/4!)+...)$ cuyos factores representan respectivamente la elección del 2, la elección del 1 y la elección del 0. Pasando a sus expresiones exponenciales tendríamos:

$e^x\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{3x}-e^{-x}}{4}$, cuya derivada enésima es $\dfrac{3^n e^{3x}-(-1)^n e^x}{4}$, que sustituyendo en 0 da: $\dfrac{3^n-(-1)^n}{4}$, siendo el desarrollo de MacLaurin de nuestra función:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{3^i-(-1)^i}{i!.4}x^i \text{ cuyo coeficiente de } x^{20}/20! \text{ es } \frac{3^{20}-1}{4}.$$

Recordemos que tenemos que multiplicar por 2 ya que sería igual número de casos para que la cantidad total de ceros sea impar y unos par.

La probabilidad pedida es $2.\dfrac{3^{20}-1}{4.3^{20}} = \dfrac{3^{20}-1}{2.3^{20}}$

f) Que el total de ceros y unos sea par

Dos casos: que ambos sean pares o ambos impares.

En el caso de que ambos sean pares tenemos la función generatriz e idéntica solución que en el apartado b), es decir

$$\frac{3^{20}+3}{4}$$

Y en el caso de que ambos sean impares tenemos la función generatriz siguiente:

$(1+x+(x^2/2!)+\ldots).\ (x+(x^3/3!)+(x^5/5!)+\ldots)^2 = e^x.\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{3x}+e^{-x}-2e^x}{4}$ cuya derivada enésima es $\frac{3^n e^{3x}+(-1)^n e^{-x}-2e^x}{4}$, que al ser sustituida en x=0, nos da $\frac{3^n+(-1)^n-2}{4}$, obteniéndose el desarrollo de Maclaurin siguiente:

$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{3^i+(-1)^i-2}{4.i!}x^i$, cuyo coeficiente de de $x^{20}/20!$ es $\frac{3^{20}-1}{4}$

Entonces los casos favorables a nuestro apartado son:

$\frac{3^{20}+3}{4}+\frac{3^{20}-1}{4}=\frac{2.3^{20}+2}{4}=\frac{3^{20}+1}{2}$, así pues la probabilidad pedida es $\frac{3^{20}+1}{2.3^{20}}$

37.) Comprueba que $\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

SOLUCIÓN:

Método 1 (por el operador sumatoria. Ver teoría en el Grimaldi, pág 284)

Sabemos que 1/(1-x) es la función generatriz correspondiente a $1+x+x^2+\ldots$
y x/(1-x) es la que corresponde a $x+x^2+x^3+\ldots$

derivando tenemos $1/(1-x)^2$ corresponde a $1+2x+3x^2$ sucesión 1,2,3....
por tanto $x/(1-x)^2$ lo hace a $x+2x^2+3x^3+\ldots$ sucesión 0,1,2,3,...
volviendo a derivar,
$(x+1)/(1-x)^3$ corresponde a $1+4x+9x^2+\ldots$ es la función generatriz de la sucesión $1,2^2,3^2,\ldots$
y $x(x+1)/(1-x)^3$ es la función generatriz de la sucesión $0, 1, 2^2, 3^2,\ldots$ $(x+4x^2+9x^3+\ldots)$
volviendo a derivar
$(x^2+4x+1)/(1-x)^4$ corresponde a $1+8x+27x^2+\ldots$
$x(x^2+4x+1)/(1-x)^4$ corresponde a la función generatriz de $0, 1^3, 2^3, 3^3$

Entonces el resultado de $0+1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ es el coeficiente de x^n de la función (Se explica perfectamente en la página 284 del Grimaldi)

$\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}\frac{1}{1-x}$ que equivale al coeficiente de x^{n-1} de la función $\frac{x^2+4x+1}{(1-x)^5}$

Grado x^2+4x+1	Coeficiente	Grado $(1-x)^{-5}$	Coeficiente
2	1	n-3	$\binom{n+1}{n-3}$
1	4	n-2	$\binom{n+2}{n-2}$
0	1	n-1	$\binom{n+3}{n-1}$

La solución es $\binom{n+1}{n-3}+4\binom{n+2}{n-2}+\binom{n+3}{n-1}=$

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!}+4\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4!}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!}=$$

$$\frac{(n+1)n[(n-1)(n-2)+4(n+2)(n-1)+(n+3)(n+2)]}{4!}=\frac{(n+1)n(6n^2+6n)}{24}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=$$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

como queríamos demostrar.

Método 2 (por inducción. Este método no forma parte del temario de discreta)
Lo compruebo para n=1.
En efecto $0+1^3=(1.2/2)^2$
Lo supongo cierto para n y lo demuestro para n+1

Tengo que demostrar que $\sum_{k=0}^{n+1}k^3=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

Partimos de que

$$\sum_{k=0}^{n+1}k^3=(n+1)^3+\sum_{k=0}^{n}k^3=(n+1)^3+\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{4(n+1)^3+n^2(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)^2(4(n+1)+n^2)}{4}=$$

$$\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$ como queríamos demostrar.

38. a) Calcula la función generatriz de la sucesión de productos 0 · (– 1), 1 · 0, 2 · 1, 3 · 2, 4 · 3, …, i · (i – 1), …

b) Utilizando el resultado anterior halla una fórmula para $\sum_{i=0}^{n}i(i-1)$

SOLUCIÓN:

a) Partimos de la siguiente función

$x^0+x^1+x^2+x^3+....$, es decir 1/(1-x)
Derivamos y obtenemos $0.x^{-1}+1.x^0+2.x^1+3.x^2+...$, es decir $1/(1-x)^2$
Derivamos otra vez y... $0.(-1)x^{-2}+1.0x^{-1}+2.1x^0+3.2x^1+...$, es decir $2/(1-x)^3$
Multiplico por x^2 y obtengo $0.(-1)+1.0x+2.1x^2+3.2x^3+...$,
Por tanto la función generatriz de la sucesión 0 · (– 1), 1 · 0, 2 · 1, 3 · 2, 4 · 3, …, i · (i – 1), … es $2x^2/(1-x)^3$

b) Utilizando el operador sumatoria

$\sum_{i=0}^{n} i(i-1)$ viene determinado por el coeficiente de grado n en la función generatriz $2x^2/(1-x)^4$ que equivale al coeficiente de grado n-2 de $2(1-x)^{-4}$

que es $2\binom{n+1}{n-2} = \frac{2(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{n(n^2-1)}{3}$

39. Calcula la sucesión generada por la función g(x) = x f(x)/(1 – x) siendo f(x) la función generatriz de la sucesión {a_i}

SOLUCIÓN:

Si f(x) es $a_0+a_1x+a_2x^2+...$ Sabemos que f(x)/(1-x) es la generatriz de la sucesión de sumas parciales, es decir

$a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2+...$

Por tanto xf(x)/(1-x) obtiene $a_0x + (a_0+a_1)x^2 + (a_0+a_1+a_2)x^3+...$

La sucesión generada es 0, a_0, a_0+a_1, $a_0+a_1+a_2$, ...

EJERCICIOS DIVERSOS (Grimaldi, pág. 287)

40. Hallase la función generatriz de las siguientes sucesiones:
a) 7, 8, 9, 10... b) 1,a,a^2,a^3, ... c) 1, 1+a, $(1+a)^2$, $(1+a)^3$,... d) 2, 1+a, 1+a^2, 1+a^3,...

SOLUCIÓN:

a) $f(x) = 7+8x+9x^2+10x^3+ ...$

$-1/(1-x)^2 = -1-2x-3x^2-4x^3 - ...$

Sumando ambas expresiones obtenemos $6(1+x+x^2+x^3+...) = 6/(1-x)$

De donde $f(x) = \frac{6}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$

b) $f(x) = 1+ax +a^2x^2 +a^3x^3+...$
$-axf(x) = -ax - a^2x^2 - a^3x^3 -...$

Sumando (1-ax) f(x) = 1, de donde f(x) = 1/(1-ax)

c) Obviamente es el caso b para a=1+a, es decir

$$\frac{1}{1-(1+a)x}$$

d) $f(x) = 2+(1+a)x+(1+a^2)x^2+ ... = (1+x+x^2+...)+(1+ax+a^2x^2+...)$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-ax}$$

41) Sea $C = \{a,b,c,d,e,f,g\}$
a) Hállese la función generatriz para los subconjuntos de C. ¿Cuántos sumandos hay en los coeficientes x^2 de esta función?
b) Hállese la función generatriz para la forma de seleccionar n objetos de C con 0≤n≤14, de C, donde cada objeto puede seleccionarse a lo sumo dos veces. ¿Cuántos sumandos hay en el coeficiente x^2 de esta función?

SOLUCIÓN:
a) La forma de elección de cada objeto es 1+x (no lo tomo o lo tomo en el subconjunto). Como son 7 objetos, la función generatriz es $(1+x)^7$ y el coeficiente de x^2 es $\binom{7}{2} = 21$
b) La selección de cada objeto es ahora $1+x+x^2$
La función generatriz es $(1+x+x^2)^{14}$. La solución sería el coeficiente de x^n
El coeficiente de x^2 :

Vamos a ver la función asociada a $1+x+x^2$

Sabemos que $1/(1-x) = 1+x+x^2+...$
$-x^3/(1-x) = -x^3-x^4 -...$

Sumando ambas funciones resulta que $1+x+x^2 = (1-x^3)/(1-x)$

Por tanto la solución buscada es el coeficiente de x^2 en $(1-x^3)^{14}(1-x)^{-14}$
que es $\binom{-14}{2} = \binom{15}{2} = 105$

42.) Hállese el coeficiente de x^{83} en $f(x) = (x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + x^{17})^{10}$

$x^5 + x^8 + x^{11} + x^{14} + x^{17} = x^5(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12})$
Por otra parte si $g(x) = 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + ...$
Multiplicando por $-x^3$ se obtiene que $-x^3g(x) = -x^3 -x^6 - ...$ Sumando ambos tenemos que $g(x) = 1/(1-x^3)$. Si multiplico por $-x^{15}$ obtengo $-x^{15} -x^{18} - x^{21}- ...$ por tanto tenemos que $1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} = (1-x^{15})/(1-x^3)$
La solución que busco es el coeficiente de grado 33 en $(1-x^{15})^{10}.(1-x^3)^{-10}$

Grado $(1-x^{15})^{10}$	Coeficiente	Grado .$(1-x^3)^{-10}$	Coeficiente
0	1	33	$-\binom{-10}{11}=\binom{20}{11}$
15	$-\binom{10}{1}$=-10	18	$\binom{-10}{6}=\binom{15}{6}$
30	$\binom{10}{2}$= 45	3	$-\binom{-10}{1}=\binom{10}{1}=10$

Solución $\binom{20}{11}-10\binom{15}{6}+450$

43. El sargento Balín debe distribuir 40 balas (20 para rifle y 20 para pistola) entre cuatro policías, de modo que cada uno obtenga al menos dos balas, pero no más de siete de cada tipo. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

<u>SOLUCIÓN:</u>
Reparto primero las balas de rifle

El número de repartos posibles viene determinado por el coeficiente de grado x^{20} en $(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7)^4$.

$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = x^2(1+x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$

Y se demuestra fácilmente (está hecho en ejercicios anteriores) que
$1+x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = (1-x^6)./(1-x)$
Por tanto la solución viene a ser el coeficiente de grado x^{20} en la expresión:

$$x^8(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$

que equivale al coeficiente de grado x^{12} en $(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$

Grado $(1-x^6)^4$	Coeficiente	Grado .$(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	1	12	$\binom{15}{12}$
6	$-\binom{4}{1}$=-4	6	$\binom{9}{6}$
12	$\binom{4}{2}$= 6	0	1

El reparto de balas de pistola sigue idéntico proceso. Por tanto la solución final es

$$\left[\binom{15}{12}-4\binom{9}{6}+6\right]^2$$

44. ¿Cuántos números telefónicos de 10 dígitos presentan sólo los digitos 1,3,5,7 si cada digito aparece al menos dos veces o no aparece?

SOLUCIÓN:
Importa el orden. Tengo que recurrir a las funciones generatrices exponenciales

La solución es el coeficiente de $x^{10}/10!$ en $(1+x^2/2!+x^3/3!+ ...)^4$
Sabemos que $e^x = 1+x+x^2/2!+x^3/3!+ ...$ por tanto la función que buscamos es $e^x – x$

Debemos buscar el coeficiente de $x^{10}/10!$ en $(e^x – x)^4$

$$(e^x - x)^4 = \binom{4}{0}e^{4x} - \binom{4}{1}x.e^{3x} + \binom{4}{2}x^2e^{2x} - \binom{4}{3}x^3e^x + \binom{4}{4}x^4$$

El coeficiente de $x^{10}/10!$ en e^{4x} es $\mathbf{4^{10}}$, ya que e^{4x} es la función generatriz exponencial de $1, 4, 4^2, ...$
Para hallar el coeficiente de $x^{10}/10!$ para $x.e^{3x}$, tenemos que su derivada i-ésima es: $3^{i-1}e^{3x}(i+3x)$ que al sustituir en 0 y el subíndice i por 10, da $\mathbf{3^9.10}$

Para hallar el coeficiente de $x^{10}/10!$ para **$x^2.e^{2x}$, observemos que es 10.9 por el coeficiente de $x^8/8!$ de e^{2x} que es 2^8**. Así el coeficiente pedido es $10.9.2^8$

Para hallar el coeficiente de $x^{10}/10!$ para $x^3.e^x$, observemos que es 10.9.8 por el coeficiente de $x^7/7!$ de e^x que es 1. Así el coeficiente pedido es 10.9.8

La solución es $\binom{4}{0}4^{10} - \binom{4}{1}10.3^9 + \binom{4}{2}10.9.2^8 - \binom{4}{3}10.9.8$

Lo consignado en rojo es una propiedad importante que permite descomponer los dos factores a la hora de calcular el coeficiente.

45.) Utilícense los cinco primero términos del desarrollo binomial de $(1+x)^{1/3}$ para aproximar la raiz cúbica de 2.

SOLUCIÓN:

El desarrollo de $(1+x)^{1/3}$
Si hacemos las 4 primeras derivadas y sustituimos la x por 0 obtenemos los coeficientes de grado 1, 2, 3 y 4, que son respectivamente 1/3, -2/9, 10/27, -80/81

Así pues $(1+x)^{1/3} \approx 1+\frac{1}{3}x - \frac{2}{9.2!}x^2 + \frac{10}{27.3!}x^3 - \frac{80}{81.4!}x^4$. Sustituyendo x por 1, obtenemos $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}24279$

46.) a) ¿Para que sucesión de números es $g(x) = (1-2x)^{-5/2}$ la función generatriz exponencial?
b) Hállense a y b de modo que $(1-ax)^b$ sea la función generatriz exponencial para la sucesión 1, 7, 7.11, 11.15, ...

SOLUCIÓN:

a) Si derivo sucesivas veces g(x), y sustituyo x por 0 obtengo la sucesión

1, 5, 7.5, 9.7.5, 11.9.7.5

b) derivando se tiene que la derivada i-ésima es

$$(-1)^i a^i b(b-1)(b-2)...(b-i+1)(1-ax)^{b-i}$$

que al sustituir por x= 0 obtenemos

$$(-1)^i a^i b(b-1)(b-2)...(b-i+1)$$

Entonces obtenemos las siguientes ecuaciones:

(1): 7 = -ab
(2): $7.11 = a^2b(b-1)$
(3): $7.11.15 = -a^3b(b-1)(b-2)$

Dividiendo (2) entre (1) se obtiene (4): 11 = a(1-b)
Dividiendo (3) entre (2) se obtiene (5): 15= a(2-b)
Se divide (4) entre (5) y se obtiene b= -7/4 y a=4

47.) En un área rural hay 12 buzones colocados en una tienda.
a) Si un repartidor de propaganda tiene 20 folletos idénticos, ¿de cuántas formas los pude distribuir, de modo que en cada buzón haya al menos un folleto?
b) Si los buzones están en dos filas de seis, ¿cuál es la probabilidad de que una distribución del apartado a) tenga 10 folletos distribuidos en los seis buzones superiores y otros 10 en los inferiores?

SOLUCIÓN:

a) Es el coeficiente de x^{20} en $(x+x^2+...)^{12} = x^{12}/(1-x)^{12}$; coeficiente de grado 8 de $(1-x)^{-12}$

$$\binom{19}{8}$$

b) Las formas que se pueden distribuir 10 folletos en 6 buzones, teniendo que haber al menos un folleto en cada buzón, que es el coeficiente de x^{10} en $(x+x^2+...)^6 = x^6.(1-x)^{-6}$; coeficiente de x^4 de $(1-x)^{-6}$

Es decir, $\binom{9}{4}$. Como son dos filas idénticas, sería $\binom{9}{4}^2$

La probabilidad es entonces $\binom{9}{4}^2 : \binom{19}{8}$