1. ***Un número telefónico consta de siete cifras enteras. Supongamos que la primera cifra debe ser un número entre 2 y 9, ambos inclusive. La segunda y la tercera cifra deben ser números entre 1 y 9, ambos inclusive. Cada una de las restantes cifras es un número entre 0 y 9, ambos inclusive. ¿Cuántos números de teléfono distintos pueden formarse con estas condiciones?***

SOLUCIÓN:

Para la primera cifra tenemos 8 casos. Para la segunda y tercera juntas son $RV_{9,2}$ y las restantes serán $RV_{10,4}$.

En consecuencia el número de teléfonos es $\mathbf{8.9^2.10^4}$ = 6.480.000

2. ***Una empresa produce cerraduras de combinación. Cada combinación consta de tres números enteros del 0 al 99, ambos inclusive. Por el proceso de construcción de las cerraduras cada número no puede aparecer más de una sola vez en la combinación de la cerradura. ¿Cuántas cerraduras diferentes pueden construirse?***

SOLUCIÓN:

Una posible combinación sería 1, 23, 87 que sería distinta de 23, 1, 87, por lo que importa el orden. Por otra parte nos dicen que cada número no puede aparecer más de una sola vez, por lo que no hay repetición.

Se trata de V100, 3 = 100.99.98

3. ***El consejo directivo de una empresa informática tiene 10 miembros. Se ha programado una próxima reunión de accionistas para aprobar una nueva lista de ejecutivos (elegidos entre los 10 miembros del consejo). ¿Cuántas listas diferentes, formadas por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, pueden presentar el consejo a los accionistas para su aprobación?Si tres miembros del consejo son ingenieros en informática ¿cuántas de las anteriores listas tienen:***

a) un ingeniero propuesto para la presidencia?

b) exactamente un ingeniero en la lista?

c) al menos un ingeniero en la lista?

SOLUCIÓN:

Llamemos a los miembros 1,2,3,..., 10

Una lista sería 1,2,3,4 otra sería 4,5,3,1 donde el orden importa ya que el primero sería el presidente, el segundo el vicepresidente, el tercero el secretario y el cuarto el tesorero, es decir que la lista 1,2,3,4 no sería la misma que la 4,3,2,1 ya que el primer caso el presidente sería 1 y en el segundo sería 4. Obviamente no hay repetición.

Así pues el número de listas es $\mathbf{V_{10,4}}$**= 10.000.**

a) Si tres miembros del consejo son ingenieros. ¿En Cuántas listas hay un ingeniero propuesto para la presidencia?

Fijamos el presidente (3 casos) y variamos a los restantes. Tendríamos entonces $3.V_{9,3}$ = 3.9.8.7

b) En cuantas listas hay exactamente un ingeniero.

Tenemos 3 ingenieros para 4 posiciones y los 7 miembros restantes los variamos de 3 en 3

$4.3.V_{7,3}$

c) En cuantas listas hay por lo menos un ingeniero.

Calculamos todas las que no tienen ningún ingeniero y las restamos del total, es decir

$V_{10,4} – V_{7,4}$

4. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 7 se forman números de cinco cifras que no tengan ninguna repetida.a) ¿Cuántos números se pueden formar? b) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 4 y cuántos son múltiplos de 2?

SOLUCION:

a) Importa el orden y no hay repetición $V_{6,5} = 6.5.4.3.2 = 720$
b) Son múltiplos de 4 los que acaban en 12, 24, 32, 44, 52, 72. El caso 44 no nos vale por haber repetición.

Acaban en 12 $V_{4,3} = 4.3.2. = 24$. Por tanto los múltiplos de 4 son 5.24=**120**.

Como hay 720 casos, acaban en una cifra concreta de las 6, 720/6 = 120 y como para ser pares tienen que acabar en 2 o 4, el número de pares que hay es **240**.

5. Un profesor del Departamento de Computación tiene siete libros de programación diferentes en una estantería. Tres de los libros son de FORTRAN y los otros cuatro de PASCAL. ¿De cuántas formas puede ordenar el profesor estos libros si:

a) no hay restricciones?
b) los lenguajes se deben alternar?
c) todos los libros de FORTRAN deben estar juntos?
d) todos los libros de FORTRAN deben estar juntos y los libros de PASCAL también?

SOLUCIÓN:

a) Si constituyen siete libros diferentes, el resultado es **$P_7 = 7!$**
b) Los lenguajes deben alternar, es decir $P_1F_1P_3F_2P_2F_3P_4$ y siempre deben estar colocados así variando solamente los subíndices. Por cada cuaterna de los de Pascal tengo $P_3 = 3!$ ternas de fortran. Por tanto la solución es **$P_4.P_3 = 4!.3!$**
c) Si los libros de Fortran deben estar juntos, puedo considerar un bloque a los tres permutados entre sí, es decir, por ejemplo:

$P_1(FFF)P_2P_3P_4$

El número de casos que tendríamos en esa situación sería $P_5 = 5!$, pero a su vez los elementos de FFF permutan entre sí P_3 veces, por lo que el resultado pedido será:

$P_5.P_3 = 5!.3!$

d) Si los de Fortran deben estar juntos y los de Pascal también tenemos los dos casos FFFPPPP o PPPPFFF, es decir P_2, pero a su vez el bloque FFF presenta P_3 casos y el bloque PPPP presenta P_4 casos. El resultado final sería:

$P_2.P_3.P_4 = 2!.3!.4!$

6. ¿De cuántas formas se pueden colocar las letras de la palabras POLIINSATURADO de modo que se mantenga el orden en que aparecen las vocales?

<u>SOLUCIÓN:</u>

Método 1

Consideremos 14 cajas donde contener las 14 letras que componen esa palabra y las numeramos para identificarlas del 1 al 14.

Como las vocales han de ir siempre en el orden O, I, I, A, U, A, O, para cada posición de las vocales lo que permutan son las consonantes, es decir $P_{7.}$ Ahora solo nos falta ver cuantas posiciones posibles tengo para las vocales. Ahí intervienen las cajas. Asigno una caja a la vocal

Una posible solución sería 1234567, es decir que la O estaría en la caja 1, la I en la 2 y en la 3, en la 4 habría una A en la 5 una U, en la 6 una A y en la 7 una O.

Otra posible solución sería 1(13)8(11)623. Los ordenaría de menor a mayor y la O estaría en la caja 1, la caja 2 y 3 contendrían la I, la caja 6 contendría la A, la 8 sería para la U, la 11 para la A y la 13 para la O.

¿Cuántas de estas disposiciones de las cajas podemos hacer? Como podemos observar el orden de las cajas no importa, es decir que el caso 1234567 es el mismo que el 6543217 ya que las vocales tienen que conservar el orden inicial. Se trata entonces de $C_{14,7}$.

La solución del ejercicio es **$P_7.C_{14,7}$**

Método 2

Otra forma de plantearlo es así: Puesto que las vocales tienen siempre que estar en el mismo lugar puedo denominarlas a todas por V, independientemente de cuales sean. Tendría algunos casos como:

PVLVVNSVTVRVDV, PLVVVVRDTVVVNS, donde VVVVVVV siempre sería la secuencia OIIAUAO. Se ve fácilmente que se trata de permutaciones con repetición ya que importa el orden y existe repetición fija del elemento V, 7 veces y cada una de las restantes letras 1 vez.

$RP_{14;\,7,1,1,1,1,1,1,1}$

Obviamente el resultado, utilizando ambos métodos, conduce a la misma solución:

$14!/7!$

7. Una mano de bridge consta de 13 cartas del conjunto de 52 de la baraja francesa.
a) ¿Cuántas manos de bridge son posibles?
b) ¿De cuántas formas se le puede dar a una persona 6 picas y 5 corazones?

SOLUCIÓN:

La baraja francesa consta de 13 cartas por cada "palo", siendo los palos: picas, corazones, tréboles y rombos. Y las 13 cartas de cada palo son el AS(1), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K. Las tres últimas son el Jocker, Queen, King (el equivalente a la sota, caballo y rey de la baraja española).

a) El número posibles de manos es obviamente $\mathbf{C_{52,13}}$ pues el orden en que estén dadas las cartas no influye en la mano y no puede haber repetición por no haber cartas repetidas.
b) En una mano hay $C_{13,6}$ de dar 6 picas, pues tengo 13 picas para dar 6. Analogamente para dar 5 corazones serían $C_{13,5}$. Por último me quedan todavía dos cartas por dar para completar la mano, de donde puedo elegir cualquiera que no sea picas ni corazones, es decir 13 tréboles y 13 rombos, es decir $C_{26,2}$

   Por tanto el resultado final es $\mathbf{C_{13,6}.\, C_{13,5}.\, C_{26,2}}$

8. ¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus dígitos es exactamente 9?

¿Cuántos de los números anteriores tienen todas sus cifras diferentes de cero?

SOLUCIÓN:

a) Es equivalente a ¿cuántas soluciones enteras tiene la ecuación
   $x + y + z + t = 9$ con $x\geq1$ e $y,z,t\geq0$

   Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^9 en el producto $(x+x^2+x^3+...)\,(1+x+x^2+x^3+...)^3$, es decir el coeficiente de x^9 en $x(1-x)^{-4}$ que es el coeficiente de x^8 en $x(1-x)^{-4}$

$$-\binom{-4}{8} = \binom{11}{8} = C_{12}^{9}$$

b) Es equivalente a ¿cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación
   $x + y + z + t = 9$ con x,y,z y t enteros positivos

   Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^9 en el producto $(x+x^2+x^3+...)^4$, es decir el coeficiente de x^9 en $x^4(1-x)^{-4}$ que es el coeficiente de x^5 en $(1-x)^{-4}$ que es

$$-\binom{-4}{5} = \binom{8}{5} = C_{8}^{5}$$

9. En una heladería se sirven 7 tipos de helados.

a) ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir 12 helados?

b) ¿De cuántas maneras se pueden elegir 12 helados si tiene que haber al menos uno de cada tipo?

SOLUCION:

a) Método 1:

   Tengo 7 cajas que representan los tipos de helado. Se trata de distribuir 12 elementos helados en las cajas

Por ejemplo: ** | *** | | **** | | *** | significa que hay dos helados del tipo 1, 3 del tipo 2, ninguno del tipo 3, 4 del tipo 4, ninguno del tipo 5, 3 del tipo 6 y ninguno del tipo 7.
En total tenemos **$RP_{18;\,12,6}$ = 18! / 12!.6!**

Método 2:

Sería equivalente a averiguar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación x + y + z + t + u + v + w = 12, con x,y,z,t,u,v,w no negativos.

Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^{12} en el producto $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^7$, es decir el coeficiente de x^{12} en $(1-x)^{-7}$ que es

$$\binom{-7}{12} = \binom{18}{12}$$

b)

Sería equivalente a averiguar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

x + y + z + t + u + v + w = 12, con x,y,z,t,u,v,w $\geq$1.

Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^{12} en el producto $(x+x^2+x^3+\ldots)^7$, es decir el coeficiente de x^{12} en $x^7(1-x)^{-7}$ que es el coeficiente de x^5 en $(1-x)^{-7}$ que es

$$-\binom{-7}{5} = \binom{11}{5}$$

10. Un estudiante debe responder siete de las diez preguntas de un examen. ¿De cuántas formas puede hacer su elección si:

a) no hay restricciones
b) debe contestar las dos primeras preguntas
c) debe responder al menos cuatro de las seis primeras preguntas

<u>SOLUCIÓN:</u>

a) Si las preguntas las numeramos del 1 al 10, una posible respuesta sería 9834567, que es la misma aunque alteremos el orden y no hay posible repetición. Se trata de combinaciones de 10 tomadas 7 a 7, es decir **$C_{10,7}$**
b) Si debe responder a las dos primeras, todos los casos comenzarán por 12----- y me quedan cinco preguntas por responder de las 8 restantes, por tanto serán **$C_{8,5}$**
c) Si tiene que responder al menos cuatro de las seis primeras tenemos:

Que responda exactamente 4 de las 6 primeras: $C_{6,4} \,.\, C_{4,3}$

Que responda exactamente 5 de las 6 primeras: $C_{6,5} \,.\, C_{4,2}$

Que responda exactamente 6 de las 6 primeras: $C_{6,6} \,.\, C_{4,1}$

El resultado por tanto será: **$6C_{6,4} + 6C_{6,5} + 4$**

11. En un lote de 100 ordenadores se sabe que 10 de ellos contienen circuitos integrados defectuosos. Se selecciona una muestra de 7 ordenadores de forma aleatoria para realizar un chequeo. ¿Cuántas muestras contienen:

a) Tres circuitos defectuosos?

b) Al menos un circuito defectuoso?

SOLUCIÓN:

a) De los 7, tres han debido ser elegidos de los 10 defectuosos, es decir $C_{10,3}$ y el resto serán 4 de los 90 en buen estado. Por tanto la solución es $\mathbf{C_{10,3} \,.\, C_{90,4}}$

b) Al menos un circuito defectuoso, serían todos menos los que no tuvieran ningún circuito defectuoso, esto es:

$\mathbf{C_{100,7} - C_{90,7}}$

12. Si una partida de bridge es una partición ordenada de 52 cartas en cuatro grupos de 13 cartas cada uno. ¿Cuántas partidas distintas de bridge se pueden jugar con una baraja?

SOLUCION:

Al primer jugador podemos darle $C_{52,13}$ manos, al segundo $C_{39,13}$, al tercero $C_{26,13}$ y al último 1.

Solución: $\mathbf{C_{52,13} \,.\, C_{39,13} \,.\, C_{26,13}}$

13. ¿De cuántas formas se puede distribuir un conjunto con 2n elementos en n conjuntos de 2 elementos?

SOLUCIÓN:

Pensemos que tenemos n cajas y en cada caja tenemos que poner dos de los 2n elementos dados.

Para la primera caja tendríamos $C_{2n,2}$, para la segunda $C_{2n-2,2}$ .... y así sucesivamente hasta llegar a la última que nos quedarían 2 elementos que colocar para 2, es decir $C_{2,2}$

La solución será:

$$C_{2n,2} \,.\, C_{2n-2,2} \,.\, C_{2n-4,2} \,.\, C_{2n-6,2} \ldots C_{4,2} \,.\, C_{2,2} = \frac{2n!}{(2!)^n}$$

Tambien se puede expresar como $RP_{2n;\, 2,2,\ldots,2 \text{ (n veces)}}$

14.¿De cuántas formas puede sacar un jugador cinco naipes de una baraja francesa y obtener un full (trío más pareja)?; ¿y dobles parejas?

SOLUCIÓN:

Los trios posibles que puede sacar son por carta (es decir un trío de ases, un trío de jotas...etc) $C_{4,3}$ y como hay 13 cartas distintas en cuanto a numeración, en total serían $13.C_{4,3}$. Por cada trío sacado podemos sacar (analogamente razonado) $13.C_{4,2}$.

El total de fulles es de $169.C_{4,3}.C_{4,2}$..

En cuanto a las dobles parejas, razonando con en el caso anterior serían:

$13.C_{4,2}$. para la primera pareja. Para la segunda pareja serían las mismas. y para la carta que resta, serían 44 cartas ya que no pueden estar ninguna de las figuras que forman parte de las parejas anteriores (es decir que si las dobles parejas fueran de J y de Q, en la quinta carta no podría haber ninguna J (4) ni ninguna Q (4)), es decir 8, quedándome 44 cartas.

Solución $169.C_{4,2}.C_{4,2}$.. 44

15, ¿Cuántas permutaciones de las letras de la palabra MISSISSIPPI no contienen dos o más letras I consecutivas?

SOLUCION

En total tenemos $RP_{11;\,1,4,4,2}$

Tienen dos o más consecutivas aquellas que al menos contienen el bloque II manteniéndose siempre junto. Consideremos pues las dos I consecutivas como una sola I y tendremos 3 I tan solo. Por tanto todos los casos en los que van a aparecer la I consecutiva dos o tres veces es

$RP_{10;\,1,,4,3,2}$

La solución al problema será: $RP_{11;\,1,4,4,2}$ - $RP_{10;\,1,4,3,2}$

16 ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 libros distintos entre cuatro niños de modo que:

a) cada niño reciba tres libros?

b) los dos niños mayores reciban 4 libros y los dos menores dos cada uno?

SOLUCIÓN:

Método 1 (interpretado por combinaciones)

a) El primer niño puede recibir $C_{12,3,}$ el segundo $C_{9,3}$, el tercero $C_{6,3}$ y el último $C_{3,3}$

Por tanto la solución es $C_{12,3,.}\, C_{9,3\,.}\, C_{6,3}\, .C_{3,3}$

b) El mayor recibe 4 libros por tanto pueden distribuirsele $C_{12,4,}$ al otro por tanto le quedan $C_{8,4}$, al tercero le quedan $C_{4,2}$ y al último $C_{2,2}$

La solución es $C_{12,4\,.}\, C_{8,4\,.}\, C_{4,2}$ .1 **Método 2** (interpretado por permutaciones con repetición)

a) En este caso llamo A B C D a los niños. Supongamos que están así designados de mayor a menor edad:

Fijo los libros del 1 al 12, y voy asignando los niños a los libros. Una posible asignación sería AAA BBB CCC DDD, otra sería ABBAABCDCDCD. De esta manera repartiría los 12 libros entre los 3 niños y las formas distintas de hacerlo serían

$RP_{12;\,3,3,3,3,}$

b) En esta ocasión los repartos serían del tipo AAAABBBBCCDD, es decir que la repetición sería 4 para A, 4 para B y 2 para C y D. Por tanto todos los posibles repartos serían:

$RP_{12};\ _{4,4,2,2}$

17. Determínese el coeficiente de x^9y^3 en:

a) $(x + y)^{12}$, b) $(x + 2y)^{12}$, c) $(2x + 3y)^{12}$.

SOLUCION:

a) $\binom{12}{i} y^i x^{12-i} = coef.x^9y^3$ de donde i=3. El coeficiente es $\binom{12}{3}$ = 220

b) $\binom{12}{i}(2y)^i x^{12-i} = coef.x^9y^3$; i = 3. El coeficiente es $\binom{12}{3}2^3$ = 1760

c) $\binom{12}{i}(3y)^i (2x)^{12-i} = coef.x^9y^3$; i=3. El coeficiente es $\binom{12}{3}3^3 2^9$ = 3041280

*18. **Determínese el coeficiente de***

a) xyz^2 en $(x + y + z)^4$, b) xyz^2 en $(2x – y – z)^4$, c) xyz^{-2} en $(x – 2y + 3z^{-1})^4$

SOLUCIÓN:

a) $((x+y)+z)^4 = \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i} z^i (x+y)^{4-i}$. Necesariamente i=2. Faltaría por conocer el coeficiente de xy en $(x+y)^2$ que es 2. Entonces el resultado final sería $\binom{4}{2}.2 = 12$

b) $((2x-(y+z))^4 = \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(-1)^i (y+z)^i (2x)^{4-i}$; 4-i = 1; i=3, que en x obtiene coeficiente 2

El problema se reduce a calcular el coeficiente de yz^2 para $(y+z)^3$ que es 3

$\binom{4}{3}3.2(-1)^3$ =-24

c) $((x-2y)+3z^{-1})^4 = \sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(3z^{-1})^i (x-2y)^{4-i}$; obviamente –i = -2, de donde i=2 cuyo coeficiente en z^{-1} es 9. Falta averiguar el coeficiente de xy en $(x-2y)^2$ que es -4.

El resultado es $\binom{4}{2}9.(-4)=-216$

19. Determínese la suma de todos los coeficientes de (x + y)^{10}.

SOLUCION:

a) $\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}=(1+1)^{10}=2^{10}=1024$

20. Dado un número real x y un entero positivo n, muéstrese que

a) $1=(1+x)^n-\binom{n}{1}x(1+x)^{n-1}+\binom{n}{2}x^2(1+x)^{n-2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}x^n$

b) $1=(2+x)^n-\binom{n}{1}(x+1)(2+x)^{n-1}+\binom{n}{2}(x+1)^2(2+x)^{n-2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}(x+1)^n$

SOLUCION:

a) El desarrollo de la derecha es $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}x^i(1+x)^{n-i}$ que es el binomio de Newton de

$((1+x)-x)^n = 1$.

b) El desarrollo de la derecha es $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}(1+x)^i(2+x)^{n-i}$ que es el binomio de Newton de

$((2+x)-(1+x))^n = 1$

21. Determina las formas diferentes en que se pueden elegir 20 monedas de cuatro grandes recipientes que contienen monedas de diferente denominación. Cada recipiente contiene un solo tipo de monedas.

SOLUCION:

Método 1:

Si denomino a los recipientes 1, 2, 3, 4. Una posible elección de monedas sería 11111122222333333344 (es decir 6 del recipiente 1, 5 del recipiente 2, 7 del recipiente 3, 2 del recipiente 4) Es obvio que no importa el orden y hay repetición variable, entonces estamos ante $RC_{4,20}=\binom{23}{20}$

Método 2:

Equivale a saber cuantas soluciones enteras tiene la ecuación

x + y + z + t = 20, donde x, y, z, t representan el número de monedas de cada tipo que tomo del recipiente 1, 2, 3 y 4 respectivamente:

Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^{20} en el producto $(1+x+x^2+x^3+...)^4$, es decir el coeficiente de x^{20} en $(1-x)^{-4}$ que es

$$\binom{-4}{20} = \binom{23}{20}$$

22. ¿De cuántas formas se pueden colocar doce canicas del mismo tamaño en cinco recipientes distintos si:

a) todas las canicas son negras?
b) cada canica es de distinto color?

SOLUCION:

a) Método 1

Utilizando las barras y asteriscos

** | **** |*** | * | ** $RP_{16;12,4}$

o asignando recipiente a las canicas

112222333455 $RC_{5,12} = \binom{16}{12}$

Método 2

Equivale a saber cuantas soluciones enteras tiene la ecuación

x + y + z + t +w = 12, donde x, y, z, t representan el número de canicas que coloco en el recipiente 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente:

Podemos utilizar la teoría de funciones generatrices (tema siguiente) y sería el coeficiente de x^{12} en el producto $(1+x+x^2+x^3+...)^5$, es decir el coeficiente de x^{12} en $(1-x)^{-5}$ que es

$$\binom{-5}{12} = \binom{16}{12}$$

b) Si son todas de distinto color

Razonando por asignación de recipiente tendríamos y fijando las canicas, que el caso

112222333455 no sería igual al caso 552222333411 ya que si suponemos que la primera canica es verde, en el primer caso estaría en el primer recipiente, mientras que en el segundo caso estaría en el 5º recipiente.
¿Cómo se interpretaría el caso 111111111111? Que todas las canicas estarían en el primer recipiente

Serían $RV_{5,12} = 5^{12}$

23. *¿Cuántas soluciones enteras no negativas tiene el sistema de ecuaciones $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 37$; $x_1 + x_2 + x_3 = 6$?*

¿Cuántas de estas soluciones verifican que $x_1, x_2, x_3 > 0$?

SOLUCION:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 37$ tiene tantas soluciones como

$RP_{43;\ 37,6}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 6$ tiene tantas soluciones como

$RP_{8;\ 6,2} = 28$. Por cada una de ellas hemos de resolver

$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 31$ que son $RP_{34,31,3} = 5984$

En total 28.5984 = 167.552

¿Cuántas verifican que $x_1, x_2, x_3 > 0$?

Coeficiente de grado x^6 de $(x+x^2+...)^3$, que equivale al coeficiente de x^3 de $(1-x)^{-3}$ que es $-\binom{-3}{3} = \binom{5}{3} = 10$

La solución es 10.5984 = 59840

24. ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras significativas tienen sus cuatro dígitos diferentes en orden creciente (como 1347, y 3689) o en orden decreciente (como 6432 y9531)? ¿Cuántos números naturales de cuatro cifras significativas tienen sus cuatro dígitos en orden no decreciente (como 3467, 2256 y 4777) o no creciente (como 7532, 9966, 5552)?

SOLUCION

Primero calculamos el número de los que tienen sus cuatro dígitos en orden creciente:
El 0 no puede aparecer por lo que el resultado pedido son $C_{9,4=}\binom{9}{4}$

Analicemos este resultado. Como en las combinaciones no importa el orden en que se tomen los elementos, la combinación 3245 a efectos de nuestro problema es la 2345, es decir que si pensamos en cualquier combinación de los números del 1 al 9 tomados de 4 en 4, la podemos ordenar, obteniendo una serie con cuatro dígitos en orden creciente.

Sin embargo en el caso de que el orden sea decreciente el número es $C_{10,4}=\binom{10}{4}$ porque ahora el 0 puede formar parte de la serie, por ejemplo 0876, sería a efectos de nuestro problema el número 8760 que tiene todos sus dígitos en orden decreciente.
Así pues el resultado sería $\binom{9}{4}+\binom{10}{4}$

En orden no decreciente serían $RC_{9,4}=\binom{12}{4}$ ya que ahora se permite la repetición y

En orden no creciente sería $RC_{10,4}=\binom{13}{4}$. Si los sumamos estaríamos repitiendo los casos 0000, 1111, 2222, ... 9999, por lo que hay que restar 10. El resultado sería:
$\binom{12}{4}+\binom{13}{4}-10$

25 ¿De cuántas formas se pueden seleccionar nueve bolas de una bolsa que contiene tres bolas rojas, tres verdes, tres azules y tres blancas?

SOLUCION.

Equivale a resolver la ecuación $x + y + z + t = 9$, *con* $0\leq x, y, z, t \leq 3$

Haciéndolo por funciones generatrices, sería el coeficiente de x^9 de $(1+x+x^2+x^3)^4$ que coincide con el coeficiente de x^9 de $(1-x^4)^4(1-x)^{-4}$

Grado de $(1-x^4)^4$	Coeficiente	Grado de $(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	1	9	$-\binom{-4}{9}=\binom{12}{9}$
4	$-\binom{4}{1}=4$	5	$-\binom{-4}{5}=\binom{8}{5}$
8	$\binom{4}{2}=6$	1	$-\binom{-4}{1}=\binom{4}{1}$

El resultado es $\binom{12}{9}-4.\binom{8}{5}+24=220-224+24=20$

26. ¿Cuántos números de la seguridad social (secuencias de nueves dígitos) tienen al menos una vez cada uno de los dígitos 1, 3 y 7?

SOLUCION:

No tienen el 1: $RV_{9,9}$; No tienen el 2 los mismos; No tienen el 3 los mismos: No tienen el 1 y el 2 $RV_{8,9}$. No tienen el 1 y el 3 los mismos y el 2 y el 3 los mismos. No tienen el 1, 2, y 3, $RV_{7,9}$ Por tanto tenemos:

$$RV_{10,9} - 3.RV_{9,9} + 3RV_{8,9} - RV_{7,9} = 10^9 - 3.9^9 + 3.\ 8^9 - 7^9$$

27. Si se lanza un dado cinco veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las cinco tiradas sea 20?

SOLUCION:

Los casos favorables son las soluciones de la ecuación

$x + y + z + t + u = 20$ con $1 \le x,y,z,t,u \le 6$

Es el coeficiente de x^{20} de la función $(x+x^2+...+x^6)^5$ que es el grado x^{15} de $(1-x^6)^5(1-x)^{-5}$

Grado de $(1-x^6)^5$	Coeficiente	Grado de $(1-x)^{-5}$	Coeficiente
0	1	15	$-\binom{-5}{15} = \binom{19}{15}$
6	-5	9	$-\binom{-5}{9} = \binom{13}{9}$
12	$\binom{5}{2} = 10$	3	$-\binom{-5}{3} = \binom{7}{3}$

Solucion: $\binom{19}{15} - 5\binom{13}{9} + 10\binom{7}{3} =$ 3876-3575+350 = 651

Como los casos posibles son $6^5 = 7776$

La probabilidad pedida es 651/7776 = 0,0837 o del 8,37%

28. Determina el número de soluciones enteras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ donde $-5 \le x_i \le 10$ para todo i, $1 \le i \le 4$

SOLUCION.

Equivalente a calcular el número de soluciones enteras para $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 39$ donde $0 \le x_i \le 15$ para todo i, $1 \le i \le 4$

Es el coeficiente de x^{39} de $(1+x+x^2+ ...x^{15})^4 = (1-x^{16})^4(1-x)^{-4}$

Grado de $(1-x^{16})^4$	Coeficiente	Grado de $(1-x)^{-4}$	Coeficiente
0	1	39	- $\binom{-4}{39}=\binom{42}{39}$
16	-4	23	- $-\binom{-4}{23}=\binom{26}{23}$
32	$\binom{4}{2}=6$	7	$-\binom{-4}{7}=\binom{10}{7}$

Solución es $\binom{42}{39}-4\binom{26}{23}+6\binom{10}{7}=11480-10400+720=1800$